目　　录

第一章 Dirac 方程

1.1 相对论性量子理论的表述

既然狭义相对性原理现在已被普遍接受，一个正确的量子理论就必须满足相对论的要求：在一个惯性系统中成立的运动定律必须在一切惯性系统中都是正确的．用数学语言来说，相对论性量子理论必须表述为 Lorentz 协变的形式．

在从非相对论性量子力学向相对论性量子力学过渡时，我们将力图保留作为非相对论性理论基础的原理．我们简短地回顾一下这些原理：[1]

1．对于一个给定的物理系统，存在一个态函数 Φ，它总括了关于系统所能知道的一切．我们在初始发展相对论性单粒子理论时，往往直接处理态函数的坐标实现，即波函数 $\psi(q_i\cdots, s_i\cdots, t)$．$\psi(q, s, t)$ 是一个复函数，它依赖于所有的经典自由度 $q_1\cdots q_n$、时间 t、以及任何附加的自由度，例如量子力学特有的自旋 s_i．波函数并没有直接的物理解释；然而，$|\psi(q_1\cdots q_n, s_1\cdots s_n, t)|^2 \geqslant 0$ 被解释为系统在时刻 t 取值 $(q_1\cdots s_n)$ 的几率．显然，这种几率解释要求：对于一切物理上可以接受的波函数 ψ 来说，在时刻 t，对于 $q_1\cdots s_n$ 的一切值，正贡献 $|\psi|^2$ 之和应当是有限的．

---

1) 例如参看 W. Pauli, "*Handbuch der Physik*," 2d ed., Vol. 24, p. 1, *J. Springer, Berlin*, 1933. L. I. Schiff, "*Quantum Mechanics*," 2d ed. *McGraw-Hill Book Company, Inc. New York*, 1955. P. A. M. Dirac, "*The Principles of Quantum Mechanics*," 4th ed. *Oxford University Press, London*, 1958.

2. 每个物理可观察量以一个线性厄米算符表示。特别是，正则动量 p_i 在座标实现中的算符对应是:

$$p_i \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_i}$$

3. 一个物理系统处于算符 Ω 的本征态，如果

$$\Omega\Phi_n = \omega_n\Phi_n, \tag{1.1}$$

其中 Φ_n 是相应于本征值 ω_n 的第 n 个本征态。对于厄米算符，ω_n 是实数。在座标实现中，与 (1.1) 相应的方程是

$$\Omega(q, s, t)\phi_n(q, s, t) = \omega_n\phi_n(q, s, t)$$

4. 展开公设说，对于一个物理系统的任意一个波函数(或态函数)可按对易算符全集 (Ω_n) 的完全正交归一本征函数集 ϕ_n 展开。于是，我们写下

$$\phi = \sum_n a_n\phi_n$$

这里正交归一性的陈述是

$$\sum_s \int (dq_1\cdots)\phi_n^*(q_1\cdots, s\cdots, t)\phi_m(q_1\cdots, s\cdots, t) = \delta_{nm}$$

$|a_n|^2$ 记录了系统处于第 n 个本征态的几率。

5. 对物理可观察量的一次测量结果是其本征值中的任意一个。特别是，对于用波函数 $\phi = \Sigma a_n\phi_n$ (这里 $\Omega\phi_n = \omega_n\phi_n$) 描写的物理系统，测量物理可观察量 Ω，则以几率 $|a_n|^2$ 得到本征值 ω_n。对于全同制备的系统，多次测量可观察量 Ω 的平均由下式给出

$$\langle\Omega\rangle_\phi = \sum_s \int \phi^*(q_1\cdots, s\cdots, t)\Omega\phi(q_1\cdots, s\cdots, t)$$

$$(dq_1\cdots) = \sum_n |a_n|^2\omega_n$$

6. 物理系统随时间的发展由 Schrödinger 方程

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \tag{1.2}$$

表述，其中哈密顿量H是一线性厄米算符。对于一封闭的物理系统，H不显含时间，即 $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$，在这种情况下，其本征值相应于系统的可能的定态。由H的线性得出迭加原理，而由H的厄米性得出了几率守恒的论述

$$\frac{d}{dt}\sum_i \int \psi^* \psi (dq_1 \cdots) = \frac{i}{\hbar}\sum_i \int (dq_1 \cdots)[(H\psi)^*\psi - \psi^*(H\psi)] = 0 \tag{1.3}$$

我们将努力保持这六条熟知的原理作为相对论性量子理论的基础。

1.2 早期的尝试

最简单的物理系统是一孤立的自由粒子系统，对于它，非相对论性哈密顿量是

$$H = \frac{p^2}{2m}. \tag{1.4}$$

向量子力学的过渡是由下列替换来实现的

$$H \to i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \tag{1.5}$$

$$\boldsymbol{p} \to \frac{\hbar}{i}\nabla.$$

它导致非相对论性 Schrödinger 方程

$$i\hbar \frac{\partial \psi(q,t)}{\partial t} = \frac{-\hbar^2\nabla^2}{2m}\psi(q,t) \tag{1.6}$$

方程 (1.4) 和 (1.6) 是非协变的，因而是不令人满意的。在 Lorentz 变换下左边和右边变换不同。按照狭义相对论，总能

量 E 和动量 (p_x, p_y, p_z) 像具有不变长度的逆变 4-矢量的分量那样变换

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right).$$

这个不变长度是

$$\sum_{\mu=0}^{3} p_\mu p^\mu \equiv p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p} = m^2c^2 \tag{1.7}$$

m 是粒子的静止质量，c 是真空中的光速．本书所用的协变符号在附录 A 中有更详尽的讨论．这里我们只指出算符替换 (1.5) 是 Lorentz 协变的，因为它是两个逆变4-矢量[1]之间的对应．$p^\mu \to i\hbar\partial/\partial x_\mu$．

根据这点，自然把

$$H = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \tag{1.8}$$

取作相对论性自由粒子的哈密顿量，并作(1.6)式的相对论性的量子类似式，写下

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \sqrt{-\hbar^2c^2\nabla^2 + m^2c^4}\,\psi \tag{1.9}$$

我们立刻面临着如何解释 (1.9) 式右边平方根算符的问题．若把它展开，我们将得到一个含有导数算符各次幂的方程，从而是非定域的理论．这样的理论非常难以处理，它是 Schrödinger方程的一个并不吸引人的变形，其中空间与时间座标以不对称的形式出现．

为了数学上的简捷(尽管或许缺少充分的物理论据)，我们去掉 (1.9) 式中的平方根算符，写出

$$H^2 = p^2c^2 + m^2c^4. \tag{1.10}$$

---

1) 我们定义 $x^\mu = (ct, \boldsymbol{x})$ 和 $\nabla^\mu = \partial/\partial x_\mu$

同样地，迭代 (1.9) 式并利用这样的事实[1]：若 $[A, B]=0$，$A\phi=B\phi$ 意味着 $A^2\phi=B^2\phi$，我们有

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi=(-\hbar^2\nabla^2c^2+m^2c^4)\phi.$$

可以看出，这就是经典的波动方程

$$\left[\square+\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\phi=0,$$

其中

$$\square=\frac{\partial}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{1.11}$$

在进一步考察 (1.11) 之前，我们首先注意到：在将能量关系平方时，我们已经引入了一个外加的负能根

$$H=-\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}.$$

为了得到简单的方程，我们已经牺牲了正定的能量，并引入了"外加的"负能解的困难．这一困难后来被克服了(将于第五章讨论)，可以对负能解作出物理解释．特别是，它们与反粒子联系起来了，而自然界中反粒子的存在对这个处理给出了强有力的实验支持．因此，让我们来考虑 (1.10) 以及由此推出的波动方程 (1.11)．我们的第一个任务是构造一个守恒流，这是因为 (1.11) 是一个二阶波动方程，它与 Schrödinger 形式 (1.2) 有所不同，而在非相对论性理论中几率解释则是以 (1.2) 为基础的．为此我们仿照对 Schrödinger 方程所做的，以 ϕ^* 乘 (1.11)，以 ϕ 乘其复共轭方程，然后相减

$$\phi^*\left[\square+\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\phi-\phi\left[\square+\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\phi^*=0$$

$$\nabla^\mu(\phi^*\nabla_\mu\phi-\phi\nabla_\mu\phi^*)=0$$

---

1) 通贯本书，我们用记号 $[A, B]\equiv AB-BA$ 表示对易子，用 $\{A, B\}=AB+BA$ 表示反对易子．

或

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}-\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)\right]$$

$$+\operatorname{div}\frac{\hbar}{2im}[\psi^*(\nabla\psi)-\psi(\nabla\psi^*)]=0 \quad (1.12)$$

我们很想把 $(i\hbar/2mc^2)\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}-\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)$ 解释为几率密度ρ.但这是不可能的,因为它不是一个正定的表达式.由于这个缘故,我们循着历史的途径[1]暂时放弃方程(1.11),希望能够找到一个对时间导数为一阶的方程,它应如在Schrödinger情形中那样,容许做直接了当的几率解释. 但是我们以后还将回到方程(1.11). 尽管我们将找到一个一阶方程、但是要对单粒子保持正定的几率密度、同时又对(1.10)的负能根提供一个物理解释,仍然是不可能的. 因此方程(1.11)(常常也称为 Klein-Gordon 方程)和我们现在就要讨论的方程一样,仍然是相对论性量子力学的同样强有力的候选者.

1.3 Dirac 方程

循着历史上 Dirac[2] 在1928年所经过的途径,我们来寻求一个具有正定几率密度的、形如(1.2)的相对论性协变方程. 既然这一方程对于时间导数是线性的,试图构成一个对空间导数也是线性的哈密顿量便是很自然的. 可以假定这样的方程的形式为

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{\hbar c}{i}\left(\alpha_1\frac{\partial\psi}{\partial x^1}+\alpha_2\frac{\partial\psi}{\partial x^2}+\alpha_3\frac{\partial\psi}{\partial x^3}\right)$$

---

1) E. Schrödinger. *Ann. Physik*, **81**, 109 (1926); W. Gordon, *Z. Physik*, **40**, 117 (1926); O. Klein *Z. Physik*, **41**, 407 (1927).

2) P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* (*London*), **A117**, 610 (1928); 同刊 **A118**, 351 (1928); "*The Principles of Quantum Mechanics*" 前引.

$$+\beta mc^2\psi = H\psi \tag{1.13}$$

这里系数 α_i 不能简单地就是数，否则即使在空间转动下方程也将不会是不变的. 此外，如果在这点上我们仍想在1.1节中所陈述的框架内进行下去，波函数也不能是一个简单的标量. 事实上，如果在固定的 t，几率密度 $\rho = \psi^*\psi$ 对全空间的积分想要是一个不变量，它应当是一个守恒4-矢量的时间分量.

为了使 (1.13) 摆脱这些限制，Dirac 建议把它看作是一个矩阵方程. 波函数 ψ，类似于非相对论性量子力学的自旋波函数，被写成有N个分量的列矩阵

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{bmatrix}$$

而常系数 α_i、β 是 $N \times N$ 矩阵. 这样，方程 (1.13) 实际上被换成了N个联立一阶方程

$$i\hbar\frac{\partial\psi_\sigma}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i}\sum_{\tau=1}^{N}\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x^1} + \alpha_2\frac{\partial}{\partial x^2} + \alpha_3\frac{\partial}{\partial x^3}\right)_{\sigma\tau}\psi_\tau$$

$$+\sum_{\tau=1}^{N}\beta_{\sigma\tau}mc^2\psi_\tau = \sum_{\tau=1}^{N}H_{\sigma\tau}\psi_\tau \tag{1.14}$$

今后我们将采取矩阵符号而省去求和指标，在这种情况下，(1.14) 以 (1.13) 的形式出现，但现在应当理解为矩阵方程.

如果要这个方程成为一个合理的出发点，首先，它必须对一个自由粒子给出正确的能量——动量关系

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

第二，它必须容许有一个连续性方程和对波函数 ψ 的几率解释；以及第三，它必须是 Lorentz 协变的. 我们现在讨论这些要求中的前两个.

为了能从方程(1.13)自然地得出正确的能量——动量关

系，ψ 的每个分量 ψ_σ 必须满足 Klein-Gordon 二阶方程，即

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi_\sigma}{\partial t^2} = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4)\psi_\sigma \qquad (1.15)$$

迭代方程 (1.13)，我们求得

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\alpha_j \alpha_i + \alpha_i \alpha_j}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j}$$

$$+ \frac{\hbar m c^3}{i} \sum_{i=1}^{3} (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) \frac{\partial \psi}{\partial x^i} + \beta^2 m^2 c^4 \psi$$

如果四个矩阵 α_i，β 服从代数

$$\begin{aligned} &\alpha_i \alpha_k + \alpha_k \alpha_i = 2\delta_{ik} \\ &\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \\ &\alpha_i^2 = \beta^2 = 1 \end{aligned} \qquad (1.16)$$

我们便能回到 (1.15)． 对这四个矩阵 α_i，β 我们还要求什么其他性质呢？我们能否明显地构成它们？ 按照 1.1 节中基本假设的要求，为了使 (1.14) 式中的哈密顿量 $H_{\alpha\tau}$ 成为厄米算符，α_i 和 β 必须是厄米矩阵．因为，按照 (1.16)，$\alpha_i^2=\beta^2=1$，故 α_i 和 β 的本征值是 ± 1．此外，从它们之间的反对易性可以得出，各个 α_i 和 β 的迹(即对角元之和)是零．例如

$$\alpha_i = -\beta \alpha_i \beta$$

而且由于迹的轮换性质

$$\mathrm{Tr} AB = \mathrm{Tr} BA$$

我们有

$$\mathrm{Tr}\alpha_i = +\mathrm{Tr}\beta^2\alpha_i = +\mathrm{Tr}\beta\alpha_i\beta = -\mathrm{Tr}\alpha_i = 0$$

因为迹正好是诸本征值之和，故正、负本征值 ± 1 的数目必须相等，因而 α_i 和 β 必须是偶数维矩阵． 最小的偶数维 $N=2$ 被排除在外，因为它只能容纳三个彼此反对易的 Pauli 矩阵加上一个单位矩阵．能够实现的 α_i 和 β 的最低维数是 $N=4$，

而这也就是我们将要讨论的情况．在一个特殊的明显的表象中，这些矩阵是

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

其中 σ_i 是熟知的 2×2Pauli 矩阵，而 β 中的 1 代表 2×2 单位矩阵．

为了构成流守恒的微分定律，我们首先引入厄米共轭波函数 $\psi^+ = (\psi_1^* \cdots \psi_4^*)$，并以 ψ^+ 左乘 (1.13)：

$$i\hbar\psi^+ \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i} \sum_{k=1}^{3} \psi^+\alpha_k \frac{\partial}{\partial x^k} \psi + mc^2\psi^+\beta\psi \tag{1.18}$$

其次，我们作出 (1.13) 的厄米共轭并右乘以 ψ

$$-i\hbar\frac{\partial\psi^+}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar c}{i} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial\psi^+}{\partial x^k}\alpha_k\psi + mc^2\psi^+\beta\psi \tag{1.19}$$

其中 $\alpha_i^+ = \alpha_i$，$\beta^+ = \beta$．从 (1.18) 减去 (1.19)，我们得到

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^+\psi = \sum_{k=1}^{3} \frac{\hbar c}{i} \frac{\partial}{\partial x^k} (\psi^+\alpha^k\psi)$$

或

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \mathrm{div}\,\boldsymbol{j} = 0 \tag{1.20}$$

其中我们把几率密度 ρ 确定为

$$\rho = \psi^+\psi = \sum_{\sigma=1}^{4} \psi_\sigma^*\psi_\sigma \tag{1.21}$$

而几率流的三个分量确定为

$$j^k = c\psi^+\alpha^k\psi \tag{1.22}$$

对全空间积分 (1.20) 并利用 Green 定理，我们求得：

$$\frac{\partial}{\partial t}\int d^3x\psi^+\psi = 0 \tag{1.23}$$

上式支持了把 $\rho = \psi^{+}\psi$ 作为正定的几率密度的尝试性解释.

(1.20) 的表达形式预示,如果 (1.22) 在三维空间转动下是不变的,则几率流 $\boldsymbol{j}$ 构成一矢量. 实际上我们必须证明的要比这多得多. (1.20) 中的密度与流必须构成 Lorentz 变换下的 4-矢量,此外,在我们可以认为 Dirac 方程满意之前,还必须证明它是协变的.

1.4 非相对论性对应

在探究确立 Dirac 理论的 Lorentz 不变性问题之前,也许更为迫切的是先来察看一下方程是否在物理上有意义.

我们可以简单地从考虑一个自由电子并计算相应于静止电子的解的数目开始. 此时,方程化简为

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \beta mc^2\psi$$

因为 de Broglie 波长是无穷大而波函数在整个空间是一样的. 在 β 的特殊的表象 (1.17) 中, 我们可以通过观察写下四个解:

$$\begin{aligned}
\psi^1 &= e^{-(imc^2/\hbar)t}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} \quad \psi^2 = e^{-(imc^2/\hbar)t}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} \\
\psi^3 &= e^{+(imc^2/\hbar)t}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} \quad \psi^4 = e^{+(imc^2/\hbar)t}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{1.24}$$

前两个解相应于正能量,后两个解相应于负能量. 由二次形 $H^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ 引起的外加负能解是一个大的困难,但也正

在这一点上，把它解译为为反粒子的形式却导致了重大的成功．我们到第五章再来讨论这一点．目前我们局限于“可接受的”正能解．特别是，我们希望证明，这些正能解有一个有意义的非相对论简化，化作二分量的 Pauli 自旋理论．为此目的，我们引入与外电磁场的相互作用，而以 4-势

$$A^\mu:(\Phi,\ \boldsymbol{A})$$

描写外电磁场．借助于规范不变替换

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - \frac{e}{c}A^\mu \tag{1.25}$$

可以最简单地将耦合引入．上式是在经典的相对论性力学中为描写点电荷 e 与外加场的作用而引入的． 在现在的情况下，依照 (1.5)

$$p^\mu \rightarrow i\hbar\partial/\partial x_\mu = p^\mu$$

而 (1.25) 则把 Dirac 方程 (1.13) 化为

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(c\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right) + \beta mc^2 + e\Phi\right)\psi \tag{1.26}$$

方程 (1.26) 表示了被看成一个点电荷的 Dirac 粒子与外加电磁场的“最小”相互作用． 为了强调它的经典类比，我们在 (1.26) 中把 H 写成 $H = H_0 + H'$，而 $H' = -e\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{A} + e\Phi$. 从点电荷相互作用能的经典表示式

$$H'_{经典} = -\frac{e}{c}\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{A} + e\Phi$$

可见，矩阵 $c\boldsymbol{\alpha}$ 在这里是作为速度的算符对应而出现的．在几率流的方程 (1.22) 中，这一算符对应 $\boldsymbol{V}_{op} = c\boldsymbol{\alpha}$ 也是明显的．如果我们作 Ehrenfest 关系[1]的相对论性推广，也可以得出这一结果：

1) Pauli, Schiff 及 Dirac, 前引.

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}=\frac{i}{\hbar}[H,\boldsymbol{r}]=c\boldsymbol{\alpha}\equiv\boldsymbol{V}_{0p}$$

和

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\pi})=\frac{i}{\hbar}[H,\boldsymbol{\pi}]-\frac{e}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\pi})=e\left[\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\boldsymbol{V}_{0p}\times\boldsymbol{B}\right] \tag{1.27}$$

其中 $\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{p}-(e/c)\boldsymbol{A}$ 是与动量相应的算符，而

$$\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}-\boldsymbol{\nabla}\Phi \quad 和 \quad \boldsymbol{B}=\text{curl}\boldsymbol{A}$$

是场强．方程(1.27)是一个点电荷 e 的运动的算符方程．同经典的展开相类似，在(1.26)中，更为普遍的耦合将导致特殊的偶极项和更高的多极项．

在取方程(1.26)的非相对论极限时，比较方便的做法是在方程(1.17)的特定表象中进行，并用二分量的列矩阵 $\tilde{\varphi}$ 和 $\tilde{\chi}$ 来表示波函数

$$\psi=\begin{bmatrix}\tilde{\varphi}\\ \tilde{\chi}\end{bmatrix} \tag{1.28}$$

于是对于(1.26)，我们得出

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}\tilde{\varphi}\\ \tilde{\chi}\end{bmatrix}=c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}\begin{bmatrix}\tilde{\chi}\\ \tilde{\varphi}\end{bmatrix}+e\varphi\begin{bmatrix}\tilde{\varphi}\\ \tilde{\chi}\end{bmatrix}+mc^2\begin{bmatrix}\tilde{\varphi}\\ -\tilde{\chi}\end{bmatrix}$$

在非相对论极限下，静能 mc^2 是问题中的最大能量，于是我们写下

$$\begin{bmatrix}\tilde{\varphi}\\ \tilde{\chi}\end{bmatrix}=e^{-(imc^2/\hbar)t}\begin{bmatrix}\varphi\\ \chi\end{bmatrix} \tag{1.29}$$

此时式中的 φ 和 χ 是随时间相对缓慢变化的函数，它们是联立方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}\varphi\\ \chi\end{bmatrix}=c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}\begin{bmatrix}\chi\\ \varphi\end{bmatrix}+e\Phi\begin{bmatrix}\varphi\\ \chi\end{bmatrix}-2mc^2\begin{bmatrix}0\\ \chi\end{bmatrix}\tag{1.30}$$

的解．因为动能和场相互作用能与 mc^2 相比是小的，故方程(1.30)的第二式可近似取为

$$\chi=\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}}{2mc}\varphi\tag{1.31}$$

方程(1.31)表明，同 ψ 的"大"分量 φ 相比，χ 是波函数 ψ 的"小"分量．在非相对论近似下，χ 和 ψ 相比是按照 $\sim v/c\ll 1$ 而减小．将(1.31)代入方程(1.30)的第一式，我们得到一个二分量的旋量方程

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}}{2m}+e\Phi\right)\varphi\tag{1.32}$$

利用 Pauli 自旋矩阵的恒等式

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

或者，在这里

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi}^2+i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi}^2-\frac{e\hbar}{c}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}\tag{1.33}$$

可以把(1.32)进一步化简为

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\left[\frac{(\boldsymbol{p}-(e/c)\boldsymbol{A})^2}{2m}-\frac{e\hbar}{2mc}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}+e\Phi\right]\varphi\tag{1.34}$$

可以看出[1]这就是 Pauli 方程．方程(1.34)使我们确信，在建立相对论性电子理论时，我们采取方程(1.13)和(1.26)作为出发点的途径是对的．φ 的两个分量足以容纳自旋为 1/2 的电子的两个自由度；而电子的正确的磁矩(相应于迴磁比 $g=2$)则自动地出现．为了明显地看出这一点，我们将(1.34)进

---

1) 出处同上

一步化简：在与均匀弱磁场 $\boldsymbol{B}=\operatorname{curl}\boldsymbol{A}$；$\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{r}$ 的相互作用中，只保留一阶项：

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\left[\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}-\frac{e}{2mc}(\boldsymbol{L}+2\boldsymbol{S})\cdot\boldsymbol{B}\right]\varphi \tag{1.35}$$

这里 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ 是轨道角动量，$\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\sigma}$ 是电子自旋，具有本征值为 $\pm\hbar/2$，而自旋与 $\boldsymbol{B}$ 场相互作用的系数给出了正确的电子磁矩，相应于 g 的值为 2.

在 Dirac 方程成功的非相对论化简的鼓舞下，我们继续走下去并来确立狭义相对论所要求的、Dirac 理论的协变性。其次，我们必须研究这一理论进一步的物理结论，特别是我们必须解释那些"负能"解。

习　　题

1. 利用一个 6 分量的场振幅把 Maxwell 方程写成 Dirac 形式(1.13). 同 α 和 β 相对应的矩阵是什么？[见 H. E. Moses, *Phys. Rev.*, **113**, 1670(1959).]

2. 验证矩阵(1.17)满足(1.16)的代数。

3. 验证(1.33)。

4. 验证(1.27)。

第二章 Dirac 方程的 Lorentz 协变性

2.1 Dirac 方程的协变形式

Dirac 方程和其物理解释所依据的连续性方程必须在 Lorentz 变换下是协变的. 让我们先来复习一下 Lorentz 变换是什么意思[1]. 处在不同惯性参照系的两个观察者 O 和 O', 将用不同的空时坐标去描述同一物理事件. 观察者 O 描述事件用坐标 x^μ, 观察者 O' 描述同一事件用坐标 $(x^\mu)'$, 而两组坐标间的 Lorentz 变换就给出将此两组坐标联系起来的规则

$$(x^\nu)' = \sum_{\mu=0}^{3} a^\nu_{\ \mu} x^\mu \equiv a^\nu_{\ \mu} x^\mu \tag{2.1}$$

这是一个线性齐次变换, 其系数 $a^\nu_{\ \mu}$ 仅依赖于两个参照系 O 和 O' 的相对速度和空间取向. Lorentz 变换的基本不变量是原时间隔

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx^\mu dx_\mu \tag{2.2}$$

这是从真空中的光速在一切 Lorentz 系中都相同这一物理观察导出的. 式 (2.1) 和 (2.2) 导致变换系数间的关系

$$a^\nu_{\ \mu} a_\nu^{\ \sigma}... $$

式 (2.1) 和 (2.3) 对正规和非正规 Lorentz 变换都是作为定义关系. 在前一种情况下, 变换系数的行列式满足关系

$$\det|a| = 1$$

[1] *W. Pauli*, "Theory of Relativity", Pergamon Press. New York, 1958. "The Principle of Relativity", collected papers of H.A. Lorentz, A.Einstein, H. Minkowski, and H.Weyl, Dover Publications, Inc., New York, 1923 reissue.

正规 Lorentz 变换可由无穷多个相继的无穷小变换来建立．它们包括沿任意空间方向的相对运动和通常的三维转动对坐标的变换．非正规 Lorentz 变换是分立的空间反射变换和时间反演变换．它们不能由相继的无穷小变换来建立．在这两种情况下其变换系数均满足关系

$$\det|a| = -1$$

我们的任务是建立一种对应，把观察者 O 和 O' 在各自的参照系中对一个 Dirac 粒子所做的一组给定的观察联系起来．换句话说，我们寻求一个变换规律，把观察者 O 和 O' 分别使用的波函数 $\psi(x)$ 和 $\psi'(x')$ 联系起来．这个变换规律是一个规则，如果 $\psi(x)$ 给定后，它便容许 O' 计算 $\psi'(x')$，按照 Lorentz 协变性的要求，这个变换所引出的函数，在带撇的参照系中与不带撇的参照系中一样，必须是同一形式的 Dirac 方程式的解． Dirac 方程的这种形式不变性表达了作为其基础的能量-动量关系

$$p_\mu p^\mu = m^2c^2$$

的 Lorentz 不变性，第一章中的考虑就是基于其上的．

在讨论协变性时，我们希望用四维记号来表示 Dirac 方程，这种记号保持了 ct 和 x^i 之间的对称性．为此目的，我们用 β/c 乘 (1.13) 并引入记号

$$\gamma^0 = \beta \quad \gamma^i = \beta\alpha_i \quad i = 1, 2, 3$$

这就给出

$$i\hbar\left(\gamma^0\frac{\partial}{\partial x^0} + \gamma^1\frac{\partial}{\partial x^1} + \gamma^2\frac{\partial}{\partial x^2} + \gamma^3\frac{\partial}{\partial x^3}\right)\psi - mc\psi = 0 \quad (2.4)$$

新的矩阵 γ^μ 提供了对易关系 (1.16) 的一个优美的重新表述

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}1 \quad (2.5)$$

其中 1 是 4×4 单位矩阵，并且此后将不再明显地表示出来．从它们的定义可以明白地看出 γ^i 是反厄米的，且 $(\gamma^i)^2=-1$，

而 γ^0 是厄米的. 在表象 (1.17) 中,它们的形式是

$$\gamma^i = \begin{bmatrix} 0, & \sigma^i \\ -\sigma^i, & 0 \end{bmatrix} \quad \gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

引入 Feynman 的带斜划的符号

$$\not{A} = \gamma^\mu A_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\mu A^\nu = \gamma^0 A^0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{A}$$

是方便的,特别是

$$\not{\nabla} = \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\gamma^0}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla}$$

此时方程 (2.4) 缩写为

$$(i\hbar\not{\nabla} - mc)\psi = 0 \tag{2.7}$$

或者,采用 $p^\mu = i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$,

$$(\not{p} - mc)\psi = 0 \tag{2.8}$$

按照"最小"替换 (1.25) 加入电磁相互作用,给出

$$\left(\not{p} - \frac{e\not{A}}{c} - mc\right)\psi = 0.$$

这决不影响协变性的考虑,因为 p^μ 和 A^μ 二者都是4-矢量,因之它们的差也是 4-矢量.

2.2 协变性的证明

为了确立 Dirac 方程的 Lorentz 协变性,我们必须满足两个要求. 第一,必须有一个明显的法则,它容许观察者 O', 在给定观察者 O 的 $\psi(x)$ 的条件下,计算出 O' 描述同一物理状态的 $\psi'(x')$. 第二,按照相对性原理, $\psi'(x')$ 将是一个方程的解,此方程在带撇的参照系中取 (2.7) 的形式

$$\left(i\hbar\tilde{\gamma}^\mu \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} - mc\right)\psi'(x') = 0$$

$\tilde{\gamma}^\mu$ 满足反对易关系 (2.5);因此, $\tilde{\gamma}^{0+} = \tilde{\gamma}^0$, $\tilde{\gamma}^{i+} = -\tilde{\gamma}^i$, 这

正是对于一个厄米的哈密顿量的要求. 一个冗长的代数证明[1]能够表明,所有这样的 4×4 矩阵 $\tilde{\gamma}^{\mu}$, 在准确到一个幺正变换 U 的范围内是等价的:

$$\tilde{\gamma}_{\mu}=U^{+}\gamma_{\mu}U \quad U^{+}=U^{-1}$$

因此我们略去 $\tilde{\gamma}^{\mu}$ 与 γ^{μ} 之间的区别,并写出

$$(\not{p}'-mc)\psi'(x')=0 \tag{2.9}$$

其中

$$\not{p}'=i\hbar\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu'}}$$

我们要求 ψ 和 ψ' 之间的变换是线性的,因为 Dirac 方程和坐标的 Lorentz 变换两者本身都是线性的. 我们以

$$\psi'(x')=\psi'(ax)=S(a)\psi(x)=S(a)\psi(a^{-1}x') \tag{2.10}$$

的形式引进这个变换. 其中 $S(a)$ 是作用于 4-分量列矢量 $\psi(x)$ 的 4×4 矩阵. 它依赖于 O 和 O' 的相对速度和空间取向. S 必须有逆矩阵,以便当 O 知道 O' 用 $\psi'(x')$ 来描述他对给定的物理态的观察时, O 能够构成他自己的波函数 $\psi(x)$

$$\psi(x)=S^{-1}(a)\psi'(x')=S^{-1}(a)\psi'(ax) \tag{2.11}$$

利用 (2.10), 我们同样可以写出

$$\psi(x)=S(a^{-1})\psi'(ax)$$

这就给出了恒等关系

$$S(a^{-1})=S^{-1}(a)$$

主要的问题是找到 S. 它必须满足 (2.10) 和 (2.11). 如果 S 存在,给定 O 用的 $\psi(x)$,观察者 O' 就能够利用 (2.10) 构成 $\psi'(x')$.

借助于 (2.11) 把 O 的 Dirac 方程 (2.7) 用 $\psi'(x')$ 重新表述出来,此时, O' 就能够检验 $\psi'(x')$ 是否满足他自己的方程

---

1) 参看 *R.H.Good*, Jr., Rev. Mod. Phys., **27**, 187(1955), 特别是第 III 节, 190 页.

(2.9)。在左乘以 $S(a)$ 之后将求得

$$\left[i\hbar S(a)\gamma^{\mu}S^{-1}(a)\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}-mc\right]\psi'(x')=0$$

利用 (2.1) 写出

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}=\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}}\cdot\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}}=a^{\nu}_{\mu}\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}}$$

可求出带撇的方程是

$$\left[i\hbar S(a)\gamma^{\mu}S^{-1}(a)a^{\nu}_{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu'}}-mc\right]\psi'(x')=0$$

只要能够找到一个 S，它具有性质

$$S(a)\gamma^{\mu}S^{-1}(a)a^{\nu}_{\mu}=\gamma^{\nu}$$

或等价的

$$a^{\nu}_{\mu}\gamma^{\mu}=S^{-1}(a)\gamma^{\nu}S(a) \tag{2.12}$$

则该方程就是形式不变的，亦即与 (2.9) 是全同的。方程 (2.12) 是确定 S 的基本关系。我们寻求 S 也就是寻求方程 (2.12) 的一个解。一旦证明了 (2.12) 有一个解并把它找出，Dirac 方程的协变性便确立了。用术语来说，按照 (2.10) 和 (2.12) 变换的波函数是一个4-分量 Lorentz 旋量。我们预期 S 将呈现出在张量计算中找不到的新特性，因为诸如几率流 (1.20) 之类的 ψ 的双线性形式予期应构成 4-矢量。

我们先来构造对于一个无穷小正规 Lorentz 变换的 S

$$a^{\nu}_{\mu}=g^{\nu}_{\mu}+\Delta\omega^{\nu}_{\mu} \tag{2.13a}$$

而且按照不变原时间隔的方程 (2.3)，

$$\Delta\omega^{\nu\mu}=-\Delta\omega^{\mu\nu} \tag{2.13b}$$

六个独立而不为零的 $\Delta\omega^{\mu\nu}$ 中的每一个都生成一个无穷小 Lorentz 变换。对于变换到沿 x 轴以速度 $c\Delta\beta$ 运动的坐标系的变换

$$\Delta\omega^{01}=\Delta\beta$$

对于绕 z 轴转过角度 $\Delta\varphi$ 的变换，

$$\Delta\omega_2^1 = -\Delta\omega^{12} = \Delta\varphi$$

如此等等。

把 S 按 $\Delta\omega^{\nu\mu}$ 的幂展开并且只保留无穷小生成元的线性项，我们写出

$$S = 1 - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\Delta\omega^{\mu\nu} \text{ 和 } S^{-1} = 1 + \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\Delta\omega^{\mu\nu} \quad (2.14)$$

而且，由 (2.13b)

$$\sigma_{\mu\nu} = -\sigma_{\nu\mu}$$

如同变换 S 及单位矩阵 1 那样，六个系数 $\sigma_{\mu\nu}$ 的每一个也都是 4×4 矩阵。把 (2.13) 和 (2.14) 代入 (2.12) 并保留 $\Delta\omega^{\mu\nu}$ 的一阶项，我们求得

$$\Delta\omega_\mu^\nu\gamma^\mu = -\frac{i}{4}(\Delta\omega)^{\alpha\beta}(\gamma^\nu\sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta}\gamma^\nu)$$

由生成元 $\Delta\omega^{\mu\nu}$ 的反对称性得出

$$2i[g_\alpha^\nu\gamma_\beta - g_\beta^\nu\gamma_\alpha] = [\gamma^\nu, \sigma_{\alpha\beta}] \quad (2.15)$$

确立 Dirac 方程的正规 Lorentz 不变性的问题现在化为寻找满足 (2.15) 的六个矩阵 $\sigma_{\alpha\beta}$ 的问题。可做的最简单的猜想是两个矩阵的反对称乘积，而利用 (2.5) 我们立刻找到

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad (2.16)$$

是所需的矩阵。按照 (2.14)，对于一无穷小 Lorentz 变换的 S 由下式给出

$$S = 1 + \frac{1}{8}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\Delta\omega^{\mu\nu} = 1 - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\Delta\omega^{\mu\nu} \quad (2.17)$$

现在用相继的无穷小变换构成有限正规变换来完成我们的任务。首先，为了从 (2.13) 建立 (2.1)，我们写下

$$\Delta\omega_\mu^\nu = \Delta\omega(I_n)_\mu^\nu \quad (2.18)$$

其中 $\Delta\omega$ 是无穷小参数，或绕一个以 n 标记方向的轴的“转角”，I_n 是绕此轴作单位 Lorentz 转动的系数所组成的 4 × 4 (在空-时中的)矩阵。ν 和 μ 分别标记行和列。从而，对于变换到以无穷小速度 $c\Delta\omega = c\Delta\beta$ 沿 x 轴运动的带撇系统的变换，

$$I^{\nu}_{\mu} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.19}$$

因此

$$I^0{}_1 = I^1{}_0 = -I^{01} = +I^{10} = -1$$

利用 I^{ν}_{μ} 的代数性质

$$I^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{和} \quad I^3 = I$$

我们可以写出对于相对于 x 轴匀速运动的有限变换为

$$\begin{aligned} x^{\nu'} &= \lim_{N\to\infty}\left(g + \frac{\omega}{N} I\right)^{\nu}_{\alpha_1}\left(g + \frac{\omega}{N} I\right)^{\alpha_1}_{\alpha_2} \cdots x^{\alpha_N} \\ &= (e^{\omega I})^{\nu}_{\mu} x^{\mu} \\ &= (\cosh\omega I + \sinh\omega I)^{\nu}_{\mu} x^{\mu} \\ &= (1 - I^2 + I^2\cosh\omega + I\sinh\omega)^{\nu}_{\mu} x^{\mu} \end{aligned}$$

对于各个个别的分量，上式给出

$$\begin{bmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\omega & -\sinh\omega & 0 & 0 \\ -\sinh\omega & \cosh\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

或

$$
\begin{aligned}
x^{0'} &= (\cosh\omega)(x^0 - \tanh\omega x^1) \\
x^{1'} &= (\cosh\omega)(x^1 - \tanh\omega x^0) \\
x^{2'} &= x^2 \\
x^{3'} &= x^3
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

其中 $\tanh\omega = \beta$ 和 $\cosh\omega = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ 把 Lorentz 转角和相对速度 $c\beta$ 联系起来.

这个结果可以推广以包括沿任意方向的运动或绕任意空间轴的转动. 生成六个独立的 Lorentz 转动的六个矩阵 I^ν_μ 是非相对性理论中熟知的三维空间转动的四维推广.

现在转向构造一个有限的旋量变换 S. 从 (2.14) 和 (2.18) 我们有

$$
\begin{aligned}
\psi'(x') = S\psi(x) &= \lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{i}{4}\frac{\omega}{N}\sigma_{\mu\nu}I_n^{\mu\nu}\right)^N\psi(x) \\
&= \exp\left(-\frac{i}{4}\omega\sigma_{\mu\nu}I_n^{\mu\nu}\right)\psi(x)
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

再次指定变换 (2.19),我们有

$$
\psi'(x') = e^{-(i/2)\omega\sigma_{01}}\psi(x) \tag{2.23}
$$

其中 x' 与 x 由 (2.21) 相联系.

类似地,对于绕 Z 轴转角为 φ 的转动, $I^{12} = -I^{21} = -1$ 和

$$
\psi'(x') = e^{(i/2)\varphi\sigma^{12}}\psi(x) \tag{2.24}
$$

在表象 (1.17) 中,上式中

$$
\sigma^{12} = \begin{bmatrix}\sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3\end{bmatrix}
$$

其中

$$\sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

是 2 × 2Pauli 矩阵。可以看出 (2.24) 与二分量 Pauli 旋量的转动形式

$$\varphi'(x') = e^{(i/2)\omega\cdot\sigma}\varphi(x) \tag{2.25}$$

的相似性。正如转动角和 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向与三维动转相联系一样，(2.18) 中的协变"角"变量 $\omega^{\mu\nu}$ 也在同一种意义上与 Lorentz 变换相联系。在 (2.24) 中，同样在 (2.25) 中，半角的出现是旋量转动定律的双值性的表现；它要转 4π 弧度才能使 $\phi(x)$ 回到其原来的值。由于这个缘故，Dirac 理论中的物理可观察量必须是 $\phi(x)$ 的双线性函数，或是 $\phi(x)$ 的偶次幂。

对于空间转动，$S = S_R$ 是么正的，因为 σ_{ij} 是厄米的，从而

$$S_R^+ = e^{-(i/4)\sigma^{+ij}\omega_{ij}} = e^{-(i/4)\sigma^{ij}\omega_{ij}} = S_R^{-1}$$

对于变到运动坐标系的变换 $S = S_L$，么正性不成立。例如，对于变换 (2.23)

$$S_L = e^{-(i/2)\omega\sigma_{01}} = e^{-(\omega/2)\alpha_1} = S_L^+ \neq S_L^{-1}$$

然而，S_L 的确有性质

$$S_L^{-1} = \gamma_0 S_L^+ \gamma_0$$

这可将 S_L 按幂级数展开而求得。因为 $[\gamma_0, \sigma^{ij}] = 0$，故可将此性质推广以包括转动

$$S^{-1} = \gamma_0 S^+ \gamma_0 \tag{2.26}$$

连续性方程也是协变的。用 (2.4) 的记号，几率流 (1.21) 和 (1.22) 是

$$j^\mu(x) = c\phi^+(x)\gamma^0\gamma^\mu\phi(x)$$

在变换 (2.1) 下变为

$$\begin{aligned} j^{\mu\prime}(x') &= c\phi'^+(x')\gamma^0\gamma^\mu\phi'(x') \\ &= c\phi^+(x)S^+\gamma_0\gamma^\mu S\phi(x) \end{aligned}$$

$$= c\psi^+(x)\gamma_0 S^{-1}\gamma^\mu S\psi(x)$$
$$= c a^\mu_\nu \psi^+(x)\gamma_0\gamma^\nu\psi(x)$$
$$= a^\mu_\nu j^\nu(x) \qquad (2.27)$$

显然 $j^\mu(x)$ 是-Lorentz 4.矢量从而连续性方程

$$\frac{\partial j^\mu(x)}{\partial x^\mu} = 0$$

是不变的。而且，几率密度 $j^0(x) = c\rho(x)$ 如同一个守恒 4-矢量的时间分量而进行变换. 这就是 1.3 节所指出的对于不变几率所希望有的结果.

因为 (2.27) 中的组合 $\psi^+\gamma_0$ 如此经常地出现，故专用一新记号来表示

$$\bar{\psi}(x) = \psi^+\gamma_0 \qquad (2.28)$$

其中 $\bar{\psi}(x)$ 称为伴随旋量. 它的 Lorentz 变换性质由下式给出

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1} \qquad (2.29)$$

2.3 空间反射

现在我们将我们的视界扩大，考虑空间反射

$$\boldsymbol{x}' = -\boldsymbol{x} \quad t' = t$$

构成的非正规 Lorentz 变换.

协变性再一次需要方程 (2.12) 的一个解，但在这一情况下我们不能够由无穷小变换建立它. 可是，很容易直接解出 (2.12). 变换矩阵是

$$a^\nu_\mu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = g^{\nu\mu} \qquad (2.30)$$

以 $S = P$ 来标记空间反射，(2.12) 变为

$$P^{-1}\gamma^\nu P = g^{\nu\nu}\gamma^\nu \qquad (2.31)$$

而

$$P = e^{i\varphi}\gamma_0 \tag{2.32}$$

就满足它．这里，相因子没有物理上含意，如果我们仿照转过4π弧度的一个转动，要求四次反射将旋量变回它自己，则相因子可缩小到四种选择 ±1，±i．(2.32) 中的 P 显然是么正的，$P^{-1} = P^+$，并且也满足 (2.26)．方程 (2.32) 告诉我们

$$\psi'(x') = \psi'(-\boldsymbol{x}, t) = e^{i\varphi}\gamma_0\psi(\boldsymbol{x}, t) \tag{2.33}$$

在非相对论极限下，ψ 趋近于 P 的一个本征态，再根据(1.24)和(2.6)，静止时的正能和负能态具有符号相反的本征值，或内禀宇称．

其他非正规变换，例如时间反演的讨论较为复杂；将在第五章中给出．

2.4 双线性协变量

用组成 γ 矩阵乘积的办法可以构成 16 个线性无关的 4×4 矩阵 $\Gamma^n_{\alpha\beta}$，它们在 Dirac 理论的应用中经常出现．这些矩阵是

$$\Gamma^S = 1 \quad \Gamma^V_\mu = \gamma_\mu \quad \Gamma^T_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu}$$
$$\Gamma^P = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma_5 \equiv \gamma^5 \quad \Gamma^A_\mu = \gamma_5\gamma_\mu \tag{2.34}$$

利用反对易关系 (2.5)，很容易通过下述论证证实 Γ^n 是线性无关的：

1. 对于每一个 Γ^n，$(\Gamma^n)^2 = \pm 1$．
2. 除去 Γ^S 之外，对于每一个 Γ^n 都存在一个 Γ^m 使得

$$\Gamma^n\Gamma^m = -\Gamma^m\Gamma^n$$

由此得出 Γ^n 的迹为零

$$\pm\mathrm{Tr}\Gamma^n = \mathrm{Tr}\Gamma^n(\Gamma^m)^2 = -\mathrm{Tr}\Gamma^m\Gamma^n\Gamma^m$$
$$= -\mathrm{Tr}\Gamma^n(\Gamma^m)^2 = 0$$

3. 给定 Γ^a 和 Γ^b，$a \neq b$，存在一个 $\Gamma^n \neq \Gamma^S$ 使得

$$\Gamma^a\Gamma^b = \Gamma^n$$

这可由直接检验 Γ 矩阵得出。

4. 假定存在一些数 a_n 使得

$$\sum_n a_n\Gamma^n = 0$$

则乘以 $\Gamma^m \neq \Gamma^S$ 并取迹；利用 (3)，我们求得 $a_m = 0$. 如果 $\Gamma^m = \Gamma^S$，我们求得 $a_s = 0$，从而所有系数均为零。

这证实了 Γ^n 的线性无关性. 由此得出，任意 4×4 矩阵都可以通过 Γ^n 写出.

现在我们可以写出由 16 个 Γ^n 构成的双线性形式 $\bar{\psi}(x)\Gamma^n\psi(x)$ 的 Lorentz 变换性质. 我们只需看到

$$\gamma^\mu\gamma_5 + \gamma_5\gamma^\mu = 0 \tag{2.35}$$

从而

$$[\gamma_5, \sigma_{\mu\nu}] = 0$$

或对所有正规 Lorentz 变换

$$[S, \gamma_5] = 0 \tag{2.36}$$

作为 (2.35) 的一个特例

$$P\gamma_5 = -\gamma_5 P \tag{2.37}$$

进行与 (2.27) 类似的计算，我们求得

$$\bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\psi(x)$$

标量

$$\bar{\psi}'(x')\gamma_5\psi'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}\gamma_5 S\psi(x)$$
$$= \det|a|\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)$$

赝标量

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\nu\psi'(x') = a^\nu_{\ \mu}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$$

矢量

$$\bar{\psi}'(x')\gamma_5\gamma^\nu\psi'(x') = \det|a|\, a^\nu_{\ \mu}\bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma^\mu\psi(x)$$

赝矢量

$$\bar{\psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'(x') = a^{\mu}_{\alpha}a^{\nu}_{\beta}\bar{\psi}(x)\sigma^{\alpha\beta}\psi(x)$$

二阶张量　　　　(2.38)

习　　题

1. 验证(2.26)。

2. 验证(2.38)中给出的变换定律。

3. 给定一个自由粒子的旋量 $u(p)$，通过做一个 Lorentz 变换，在 $q_\mu\to 0$ 和 $p\cdot q\to 0$ 条件下，用 $u(p)$ 构造 $u(p+q)$。

4. 证明存在着四个 4×4 矩阵 Γ^μ，使得

$$\mathrm{Re}\,\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = 0$$

$$\{\Gamma_\mu, \Gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu},$$

$$\left[i\Gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m\right]\psi(x) = 0$$

也就是说，Dirac 方程是实的。

第三章 Dirac 方程的自由粒子解

3.1 平面波解

我们已经看到，Dirac 理论满足 Lorentz 协变性的要求，而且 Dirac 方程的正能解有一个有意义的非相对论对应.

考虑自由粒子的方程，对 Dirac 方程解的本性及解释可以得到进一步的深入. 相应于静止的自由粒子的四个解已在(1.24)给出，现在把它们写成统一的形式

$$\psi^r(x) = w^r(0)e^{-(i\varepsilon_r mc^2/\hbar)t} \quad r = 1, 2, 3, 4 \tag{3.1}$$

其中

$$\varepsilon_r = \begin{cases} +1 & r = 1, 2 \\ -1 & r = 3, 4 \end{cases}$$

在 Dirac 矩阵的表象(1.17)中，这些旋量是

$$w^1(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad w^2(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w^3(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad w^4(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

前两个解描写 Schrödinger-Pauli 电子的两个自旋自由度. "负能"解($r=3,4$)尚待解释. 它们都是 $\sigma_z = \sigma_{12}$ 的本征函数，具有本征值 $+1$ 和 -1. 我们可以用 Lorentz 变换(2.10)来构

成任意速度的自由粒子解．若一坐标系相对于静止解的坐标系以速度 $-\boldsymbol{V}$ 运动，变换到这一坐标系，我们就构成了具有观察速度 $+\boldsymbol{V}$ 的电子的自由粒子波函数．

为了显示普遍的空时坐标变化，我们只需把 (3.1) 中的指数表示为不变形式

$$\exp\left(-i\varepsilon_r\frac{mc^2}{\hbar}t\right)=\exp\left(-i\varepsilon_r\frac{p_\mu^{(0)}x^\mu}{\hbar}\right)$$

$$=\exp\left(-i\varepsilon_r\frac{p_\mu x^{\mu'}}{\hbar}\right) \tag{3.3}$$

其中 $x^{\mu'}=a_\nu^\mu x^\nu$, $p^\mu=a_\nu^\mu p^{\nu(0)}=a_0^\mu mc$; 我们的记号处处都是使 $p^0=E/c=+\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2c^2}>0$. 在正规 Lorentz 变换之下，以及在空间反射变换之下，正能解和负能解分开各自变换而不互相混合．这可以从 (3.3) 看出，因为一个自由粒子的 4-动量是类时的，$p^\mu p_\mu=m^2c^2>0$. 因此，p_μ 在 p 空间的光锥之内．在上述变换下，未来光锥与过去光锥是不相连的，从而正能解和负能解仍保持其区别．

按照 (2.23)，我们以

$$S=e^{-(i/2)\omega\sigma_{01}} \tag{3.4}$$

对旋量作变换，其中为简单起见我们指定速度沿着 x 轴．(3.4) 中的 Lorentz 角 ω 由 $\omega=\tanh^{-1}(-v/c)=-\tanh(v/c)$ 给定，它与 (2.21) 差一负号，因为我们是变换到以速度 $-\boldsymbol{V}$ 沿 x 方向运动的坐标系．

将变换 (3.4) 用于旋量 (3.2)，我们求得

$$w^r(\boldsymbol{p})=e^{-(i\omega/2)\sigma_{01}}w^r(0)$$

$$=\left(\cosh\frac{\omega}{2}-\alpha_1\sinh\frac{\omega}{2}\right)w^r(0)$$

$$
=\cosh\frac{\omega}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\tanh\frac{\omega}{2} \\ 0 & 1 & -\tanh\frac{\omega}{2} & 0 \\ 0 & -\tanh\frac{\omega}{2} & 1 & 0 \\ -\tanh\frac{\omega}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\omega^r(0)
\tag{3.5}
$$

从 $\omega^r(0)$ 的形式 (3.2) 看，很清楚，这一变换矩阵的第 r 列恰是与 $\omega^r(p)$ 相应的列矢量. 利用三角恒等式

$$
-\tanh\frac{\omega}{2}=\frac{-\tanh\omega}{1+\sqrt{1-\tanh^2\omega}}=\frac{v/c}{1+\sqrt{1-(v^2/c^2)}}
$$

$$
=\frac{pc}{E+mc^2}
$$

和
$$
\cosh\frac{\omega}{2}=\sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}}
\tag{3.6}
$$

我们可以把 $\omega^r(p)$ 用粒子的能量和动量来重新表示.

我们也可以把 (3.5) 推广到速度 $\boldsymbol{V}$ 沿任意方向的情况. 在这情况下，(2.19) 中的矩阵 I 换为

$$
I_\nu^\mu=\begin{bmatrix} 0 & -\cos\alpha & -\cos\beta & -\cos\gamma \\ -\cos\alpha & 0 & 0 & 0 \\ -\cos\beta & 0 & 0 & 0 \\ -\cos\gamma & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
$$

其中 $\cos\alpha$, $\cos\beta$ 和 $\cos\gamma$ 是速度 $\boldsymbol{V}$ 的方向余弦，在变换矩阵中

$$
\sigma_{\mu\nu}I_n^{\mu\nu}=2(\sigma_{01}\cos\alpha+\sigma_{02}\cos\beta+\sigma_{03}\cos\gamma)=-2i\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{V}}{|\boldsymbol{V}|}
$$

借助于 (3.6)，上式给出

$$
S=\exp\left(-\frac{\omega}{2}\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{V}}{|\boldsymbol{V}|}\right)
$$

$$
= \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}}
\times \begin{bmatrix}
1 & 0 & \frac{p_Z c}{E + mc^2} & \frac{p_- c}{E + mc^2} \\
0 & 1 & \frac{p_+ c}{E + mc^2} & \frac{-p_Z c}{E + mc^2} \\
\frac{p_Z c}{E + mc^2} & \frac{p_- c}{E + mc^2} & 1 & 0 \\
\frac{p_+ c}{E + mc^2} & \frac{-p_Z c}{E + mc^2} & 0 & 1
\end{bmatrix} \tag{3.7}
$$

其中 $p_\pm = p_x \pm i p_y$. 自由粒子解的一般形式是

$$
\psi^r(x) = w^r(p) e^{-i\varepsilon_r(p_\mu x^\mu/\hbar)}, \tag{3.8}
$$

这里，(3.7) 的第 r 列给出了在 γ 矩阵表示 (1.17) 中的相应的旋量 $w^r(\boldsymbol{p})$.

$w^r(\boldsymbol{p})$ 满足下列常用的关系

$$
(\not{p} - \varepsilon_r mc)w^r(\boldsymbol{p}) = 0 \quad \bar{w}_r(\boldsymbol{p})(\not{p} - \varepsilon_r mc) = 0 \tag{3.9a}
$$

$$
\bar{w}^r(\boldsymbol{p})w^{r'}(\boldsymbol{p}) = \delta_{rr'}\varepsilon_r \tag{3.9b}
$$

$$
\sum_{r=1}^{4} \varepsilon_r w_\alpha^r(\boldsymbol{p})\bar{w}_\beta^r(\boldsymbol{p}) = \delta_{\alpha\beta} \tag{3.9c}
$$

将 Dirac 算符 $(i\not{\nabla} - m)$ 作用于 (3.8) 得到方程(3.9a)，它是一个自由粒子的 Dirac 方程在动量空间的表述. 对于 $r = 1$ 或 2，有 $\varepsilon_r = +1$，$(\not{p} - mc)w^r(p) = 0$. 这是由 (3.7) 式前两列给出的两个正能解的方程. 在这一表示中，它们的第三和第四分量是非相对论近似的"小分量"，在没有外场时，它们约化为方程(1.29)和(1.31). 对于负能解，"大"分量和"小"分量在 (3.7) 中交换了位置. 我们还按照定义 (2.28) 引入伴随旋量 $\bar{w}^r(\boldsymbol{p}) = w^{r+}(\boldsymbol{p})\gamma_0$. 它满足伴随波动方程

$$\bar{w}^r(\boldsymbol{p})(\not{p} - \epsilon_r mc) = 0 \tag{3.10}$$

上式是通过取 (3.9a) 的厄米共轭并右乘以 γ^0，再利用恒等式 $(\gamma^0)^2 = \pm 1$ 和 $\gamma^0\gamma^{\mu+}\gamma^0 = \gamma^\mu$ 而得到的.

方程(3.9b)是协变的归一化表述. 正如前一章讨论过的[见方程 (2.38)]，双线性形式 $\bar{w}^r(\boldsymbol{p})w^{r'}(\boldsymbol{p})$ 是一个 Lorentz 标量,因此,只须回复到静止解 (3.2)，我们就验证了 (3.9b). 几率密度 $w^{r+}(\boldsymbol{p})w^r(\boldsymbol{p})$ 将不是一个不变量,而是按照 (2.27) 如矢量的第四分量一样变换. 利用 (3.7) 的各行作计算. 我们求得

$$w^{r+}(\epsilon_r\boldsymbol{p})w^{r'}(\epsilon_{r'}\boldsymbol{p}) = \frac{E}{mc^2}\delta_{rr'} \tag{3.11}$$

上式表明几率密度多了一个校正因子 E/mc^2 以补偿体积元沿运动方向的 Lorentz 收缩，从而保持不变几率的归一化. 需要注意: (3.9b) 是一个旋量与其伴随旋量(动量 $\boldsymbol{p}$ 相同)之间的正交性表述;而在(3.11)中,正能的旋量则与其厄米共轭旋量(负能量且动量反向)正交. 因此，空间动量 $\boldsymbol{p}$ 相同但能量相反的两个平面波解在下述意义下正交: $\psi^{r+}(x)\psi^{r'}(x) = 0$，若 $r = 1, 2$，$r' = 3, 4$ 或者反过来 $r = 3, 4$，$r' = 1, 2$.

方程 (3.9c) 是对给定动量的四个 Dirac 旋量的完备性的表述. 对于一个静止的自由粒子，它显然是对的. 要在任意动量时证明它也对,我们可以对静止系统作适当的 Lorentz 变换,然后利用 (3.2) 求得

$$\sum_{r=1}^{4}\epsilon_r w_\alpha^r(\boldsymbol{p})\bar{w}_\beta^r(\boldsymbol{p}) = \sum_{r=1}^{4}\epsilon_r S_{\alpha\gamma}\left(-\frac{\boldsymbol{p}}{E}\right)w_\gamma^r(0)\bar{w}_\lambda^r(0)$$

$$\cdot S_{\lambda\beta}^{-1}\left(-\frac{\boldsymbol{p}}{E}\right) = S_{\alpha\gamma}\delta_{\gamma\lambda}S_{\lambda\beta}^{-1} = \delta_{\alpha\beta}$$

在完备性关系中出现的是 $\bar{w}$ 而不是 w^+，是由于从 (2.26) 导出的关系 $S^+ = \gamma^0 S^{-1}\gamma^0$,它再次反映了 Lorentz 变换不是么正

的这一事实.

对于沿 Z 方向极化的静止电子解 (3.2), 应用转动算符

$$S = e^{(i/2)\varphi \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{s}},$$

就能构成沿任意方向 $\boldsymbol{s}$ 极化的态. 特别是, 如果旋量 w 相应于沿单位矢量 $\boldsymbol{s}$ 方向极化的粒子, 这类态的定义关系就是

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{s} w = w.$$

由于 (2.24) 中 $\boldsymbol{\sigma}$ 的结构, 这些解的具体形式与二分量 Pauli 理论解的形式相似.

在这种描述中, 引入另一种记号更方便. 令 $u(p, s)$ 代表一旋量, 它是 Dirac 方程的正能解, 其动量为 p^μ 而自旋为 s^μ. 于是 $u(p, s)$ 满足方程

$$(\not{p} - mc)_{\alpha\beta} u_\beta(p, s) = 0 \tag{3.12}$$

自旋矢量 s^μ 是通过静止系的极化矢量 $\check{s}$ 由 $s^\mu = a^\mu_\nu \check{s}^\nu$ 来定义的, 这里 $\check{s}^\nu = (0, \check{\boldsymbol{s}})$, a^μ_ν 是变换到静止系的变换系数, 即 $p^\mu = a^\mu_\nu \check{p}^\nu$, 其中 $\check{p}^\nu = (m, 0)$. 注意到 $s_\mu s^\mu = -1$ 和 $\check{p}^\mu \check{s}_\mu = 0$, 从而 $p^\mu s_\mu = 0$. 在静止系中 u 满足

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \check{\boldsymbol{s}} u(\check{p}, \check{s}) = u(\check{p}, \check{s}) \tag{3.13}$$

类似地令 $v(p, s)$ 标记一负能解

$$(\not{p} + mc) v(p, s) = 0 \tag{3.14}$$

它在静止系中的极化为 $-\check{\boldsymbol{s}}$, 即

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \check{\boldsymbol{s}} v(\check{p}, \check{s}) = -v(\check{p}, \check{s}) \tag{3.15}$$

$u(p, s)$、$v(p, s)$ 和 $w^r(p)$ 的关系是

$$\begin{aligned} w^1(p) &= u(p, u_Z) \\ w^2(p) &= u(p, -u_Z) \\ w^3(p) &= v(p, -u_Z) \\ w^4(p) &= v(p, u_Z) \end{aligned} \tag{3.16}$$

其中 u^μ_Z 是一4矢量, 它在静止系中形式为

$$\check{u}^\mu_Z = (0, \check{\boldsymbol{u}}_Z) = (0, 0, 0, 1)$$

这样，一个任意的旋量就由动量 p_μ，能量的符号和在静止系中的极化 ζ_μ 确定了.

3.2 能量和自旋的投影算符

在实际计算中，常常为了方便而需要有一些算符，它们对给定能量符号和极化的旋量做出“投影”．这些投影算符是非相对论性二分量算符

$$P_\pm = \frac{1 \pm \sigma_z}{2}$$

的四维类推，它对任意态投影出自旋向上或向下的振幅.

对于 Dirac 方程，我们寻求四个这样的算符，它们把给定动量为 $\boldsymbol{p}$ 的平面波解投影为相应于正能和负能、沿给定方向自旋向上和向下的四个独立解．我们希望这些算符具有协变的形式，以便在不同的 Lorentz 坐标系之间易于进行变换，在实际计算中将证明这样做的益处.

我们把四个投影算符标记为 $\boldsymbol{P}_{p_r}(p) \equiv \boldsymbol{P}({}_\mu, u_Z, \varepsilon)$，并定义它们具有如下的性质:

$$\boldsymbol{P}_r(p) w^{r'}(p) = \delta_{rr'} w^{r'}(p)$$

或等价地 $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ (3.17)

$$\boldsymbol{P}_r(p) \boldsymbol{P}_{r'}(p) = \delta_{rr'} \boldsymbol{P}_r(p)$$

把给定动量 $\boldsymbol{p}$ 的正能或负能本征态投影出来的协变算符可以直接从(3.9a)求得．我们把它标记为

$$\Lambda_r(p) = \frac{\varepsilon_r \not{p} + mc}{2mc}$$

或写成另一种形式

$$\Lambda_\pm(p) = \frac{\pm \not{p} + mc}{2mc} \tag{3.18}$$

通过直接计算，并利用 $\not{p}\not{p} = p^2 = m^2c^2$，我们验明

$$\Lambda_r(p)\Lambda_{r'}(p) = \frac{m^2c^2(1+\varepsilon_r\varepsilon_{r'}) + mc\not{p}(\varepsilon_r+\varepsilon_{r'})}{4m^2c^2}$$

$$= \left(\frac{1+\varepsilon_r\varepsilon_{r'}}{2}\right)\Lambda_r(p)$$

这也就是

$$\Lambda_+^2(p) = \Lambda_+(p)$$
$$\Lambda_+(p)\Lambda_-(p) = 0$$

还要注意

$$\Lambda_+(p) + \Lambda_-(p) = 1$$

为了展示对于自旋的类似的算符，我们回到最容易描述自旋的静止系，并尝试找出一个能够化为协变形式的投影算符. 对于自旋向上的粒子，一种自然的选择是 $(1+\sigma_Z)/2$. 二分量的非相对论自旋投影算符，是通过把 $(1+\sigma_Z)/2$ 重新写成标量

$$\frac{1+\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{u}}_Z}{2}$$

而摆脱对 z 方向的明显依赖的；应用同样的方法，我们尝试利用4-矢量 $\check{u}_Z^\mu$ 把 Dirac 自旋投影算符写为标量形式，即

$$\frac{1+\sigma_Z}{2} = \frac{1+\gamma_5\gamma_3\check{u}_Z^3\gamma_0}{2} = \frac{1+\gamma_5\check{\not{u}}_Z\gamma_0}{2}$$

现在可通过消去 γ_0 而把它变为协变形式. 因为我们是在静止系，γ_0 作用于 Dirac 旋量变成 ± 1. 最后，依照 (3.14) 和 (3.15) 建立的规定，协变的 Dirac 自旋投影算符是

$$\Sigma(u_Z) = \frac{1+\gamma_5\check{\not{u}}_Z}{2}$$

或者，对于一个满足 $s^\mu p_\mu = 0$ 的一般的自旋矢量 s^μ，

$$\Sigma(s) = \frac{1+\gamma_5\not{s}}{2} \tag{3.19}$$

于是在静止系中

$$\Sigma(\check{u}_Z)w^1(0)=\frac{1+\gamma_5\check{\psi}_Z}{2}w^1(0)=\frac{1+\sigma_Z}{2}w^1(0)$$

$$=w^1(0) \tag{3.20}$$

和 $$\Sigma(-\check{u}_Z)w^2(0)=w^2(0)$$

类似地，对于负能旋量

$$\Sigma(-\check{u}_Z)w^3(0)=\frac{1-\gamma_5\check{\psi}_Z w^3(0)}{2}=\frac{1+\gamma_5\check{\psi}_Z\gamma_0}{2}w^3(0)$$

$$=\frac{1+\sigma_Z}{2}w^3(0)=w^3(0) \tag{3.21}$$

和 $$\Sigma(\check{u}_Z)w^4(0)=w^4(0)$$

用旋量 u 和 v 的定义 (3.16) 来表示，这些式子是

$$\Sigma(u_Z)u(p,u_Z)=u(p,u_Z)$$
$$\Sigma(u_Z)v(p,u_Z)=v(p,u_Z)$$
$$\Sigma(-u_Z)u(p,u_Z)=\Sigma(-u_Z)v(p,u_Z)=0$$

由于投影算符 Σ 的协变形式，对于任何极化矢量 $s^\mu(s^\mu p_\mu=0)$ 我们都可写出

$$\Sigma(s)u(p,s)=u(p,s)$$
$$\Sigma(s)v(p,s)=v(p,s) \tag{3.22}$$
$$\Sigma(-s)u(p,s)=\Sigma(-s)v(p,s)=0$$

有了四个投影算符 $\Lambda_\pm(p)$ 和 $\Sigma(\pm s)$，我们现在就能用，4-动量 p_μ、能量符号 ϵ 和极化矢量 $s^\mu(s^\mu p_\mu=0)$ 完全标明自由粒子的运动．特别是，我们由 (3.18) 和 (3.19) 构成四个投影算符

$$P_1(p)=\Lambda_+(p)\Sigma(u_Z)$$
$$P_2(p)=\Lambda_+(p)\Sigma(-u_Z)$$

$$P_3(p) = \Lambda_-(p)\Sigma(-u_Z)$$
$$P_4(p) = \Lambda_-(p)\Sigma(u_Z).$$

注意：对于所有满足 $s^\mu p_\mu = 0$ 的矢量，$[\Sigma(s), \Lambda_\pm(p)] = 0$，因为，$\not p$ 与 γ_5 和 $\not s$ 都反对易．由此得出，这些 $P_r(p)$ 满足定义关系 (3.17)．

在发展快速而有效的计算技术中，我们经常用这些算符．它们容许我们利用闭合法，从而不需要把矩阵和旋量解一个分量一个分量地写出来．

为了得到不变的公式，我们已引入了动量为 $\boldsymbol{p}$ 的负能解，按照 (3.8)，它是动量算符 $\boldsymbol{p}$ 的、本征值为 $-\boldsymbol{p}$ 的本征函数．类似地，按照 (3.19) 和 (3.21)，代表自旋向上和自旋向下的态的负能解，在它们的静止系中分别化为 σ_z 的、具有本征值为 -1 和 $+1$ 的本征函数． 对于负能解，本征值这种显然地颠倒应用的物理原因，在我们学到第五章空穴理论时就明白了．

3.3 自由粒子解和波包的物理解释

现在可以按我们的意图将平面波解迭加，构成定域化的波包．因为 Dirac 方程是线性的，按照迭加原理，这些波包仍是自由 Dirac 方程的解． 我们研究它们以便进一步深入解释自由粒子解．

作为开始，我们只用正能解的迭加来构成一个波包：

$$\psi^{(+)}(\boldsymbol{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sqrt{\frac{mc^2}{E}} \sum_{\pm s} b(p,s)u(p,s)e^{-ip_\mu x^\mu/\hbar} \tag{3.23}$$

为了把展开系数 $b(p,s)$ 归一化为单位几率，我们求助于旋量

的正交关系 (3.11) 并求得[1]

$$\int \psi^{(+)\dagger}(\boldsymbol{x}, t)\psi^{(+)}(\boldsymbol{x}, t)d^3x$$
$$= \int d^3p \frac{mc^2}{E} \sum_{\pm s, \pm s'} b^*(p, s')b(p, s)u^\dagger(p, s')u(p, s)$$
$$= \int d^3p \sum_{\pm s} |b(p,s)|^2 = 1 \tag{3.24}$$

这一波包的平均流由速度算符的期望值给出

$$J^{(+)} = \int \psi^{(+)\dagger} c\boldsymbol{\alpha}\psi^{(+)} d^3x \tag{3.25}$$

在对其求值时，我们利用了可由自由粒子解构成的三个 4-矢量之间的下述重要关系。

对于 Dirac 方程 $(\not{p} - mc)\psi(x) = 0$ 的任何两个解 $\psi_1(x)$ 和 $\psi_2(x)$

$$c\bar{\psi}_2\gamma^\mu\psi_1 = \frac{1}{2m}[\bar{\psi}_2 p^\mu\psi_1 - (p^\mu\bar{\psi}_2)\psi_1] - \frac{i}{2m}p_\nu(\bar{\psi}_2\sigma^{\mu\nu}\psi_1) \tag{3.26}$$

为了证明 (3.26)，我们注意，如果 a^μ 和 b^μ 是任意两个 4-矢量，则

$$\not{a}\not{b} = a_\mu b_\nu[1/2\,(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu) + 1/2\,(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)]$$
$$= a^\mu b_\mu - ia^\mu b^\nu\sigma_{\mu\nu} \tag{3.27}$$

然后，利用 Dirac 方程构成

---

1) 我们把推导 (3.24) 所用的 δ 函数的熟知性质收集在这里:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i(s-a)x} = 2\pi\delta(s-a)$$

如果 $f(s)$ 在积分区间内无奇点

$$\int ds\delta(s-a)f(s) = f(a)$$

[包含 $s = a$ 的区间]

$$\delta\left(\frac{s}{c}\right) = |c|\delta(s) \quad |c| \neq 0$$

从分布论的意义来说，δ 函数在数学上是可接受的，例如，见 M. J. Lighthill, "*Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions*", *Cambridge University Press, London*, 1958.

$$0 = \bar{\phi}_2(-\bar{p} - mc)a\phi_1 + \bar{\phi}_2 a(\bar{p} - mc)\phi_1$$
$$= -2mc\bar{\phi}_2 a\phi_1 + \bar{\phi}_2[a^\mu_i \bar{p}_\mu - ia^\mu \bar{p}^\nu \sigma_{\mu\nu}$$
$$- \bar{p}^\mu a_\mu + i\bar{p}^\mu a^\nu \sigma_{\mu\nu}]\phi_1$$
$$(\bar{\phi}\bar{p} = p_\mu \bar{\phi}\gamma^\mu)$$

从而，作为任意矢量 a^μ 的系数，得出 (3.26).

恒等式 (3.26) 称为 Gordon 分解式[1]. 它把 Dirac 流表示为与非相对论对流类似的一个对流和一个自旋流之和.

在 $\phi_2 = \phi_1 = \phi$ 的特殊情况下，借助于 (3.26) 以及 (3.23)，我们现在求得流 (3.25) 为

$$J_i^{(+)} = \int d^3x \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi\hbar)^3} \frac{mc^2}{\sqrt{EE'}} \sum_{\pm s, \pm s'} b^*(p', s')$$
$$\times b(p, s) e^{i(p'-p)^\mu x_\mu/\hbar} \frac{1}{2m} \bar{u}(p', s')[(p'_i + p_i)$$
$$+ i\sigma^\nu_i (p'_\nu - p_\nu)] u(p, s)$$
$$= \int d^3p \frac{p_i c^2}{E} \sum_{\pm s} |b(p, s)|^2 \tag{3.28}$$

按照 (3.24) 的归一化，可以把流写为

$$\boldsymbol{J}^{(+)} = \langle c\boldsymbol{\alpha} \rangle_+ = \left\langle \frac{c^2 \boldsymbol{p}}{E} \right\rangle_+ = \langle \boldsymbol{V}_{gp} \rangle_+ \tag{3.29}$$

其中，$\langle \quad \rangle_+$ 标记系对一个正能量波包的期望值. 从而，由正能解构成的任意波包的平均流正好就是经典的群速度. 相应的论述在非相对论性 Schrödinger 理论中是熟知的.

现在我们来看在相对论性理论中一个重要的区别. 在 Schrödinger 理论中，在流中出现的速度算符正好是 $\boldsymbol{p}/m$，而且对自由粒子是一个运动常数. 然而，在 Dirac 理论中，流并不与动量成正比，而且，虽然 *Ehrenfest* 关系已经表明对于自由

1) W. Gordon, *Z. Physik*, **50**, 630, (1928).

粒子运动 $\frac{d}{dt}\boldsymbol{p}=0$，速度算符 $c\boldsymbol{\alpha}$ 却不是常数，因为 $[\boldsymbol{\alpha}, H]\neq 0$. 的确，为了构成 $c\boldsymbol{\alpha}$ 的本征函数，我们不得不把正能解和负能解都包括进去. 因为 $c\alpha^i$ 的本征值是 $\pm c$，而依照(3.29)，$|\langle c\alpha^i\rangle_+|<c$.

为了由自由粒子解的全能构成波包，现在让我们扩大考虑范围，将正能解和负能解都包括进去. 我们把(3.23)推广为

$$\psi(\boldsymbol{x}, t)=\int\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\sqrt{\frac{mc^2}{E}}\sum_{\pm s}[b(p, s)u(p, s)e^{-ip^\mu x_\mu/\hbar}$$
$$+d^*(p, s)v(p, s)e^{+ip^\mu x_\mu/\hbar}] \tag{3.30}$$

同样归一化成单位几率. 一个简短的计算给出这样一个波包[1]的几率为

$$\int d^3x\psi^+(\boldsymbol{x}, t)\psi(\boldsymbol{x}, t)$$
$$=\int d^3p\sum_{\pm s}[|b(p, s)|^2+|d(p, s)|^2]=1$$

以及其流为

$$J^k=\int d^3p\left\{\sum_{\pm s}[|b(p, s)|^2+|d(p, s)|^2]\frac{p^kc^2}{E}\right.$$
$$+i\sum_{\pm s,\pm s'}b^*(-p, s')d^*(p, s)e^{2ix_0p_0/\hbar}$$
$$\times\bar{u}(-p, s')\sigma^{k0}v(p, s)$$
$$-i\sum_{\pm s,\pm s'}b(-p,s')d(p,s)e^{-2ix_0p_0/\hbar}$$
$$\left.\times\bar{v}(p, s')\sigma^{k0}u(-p, s)\right\} \tag{3.31}$$

---

1) 尽管存在某些不一致，今后我们标记

$$u(\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}, -\boldsymbol{p}, s)\equiv u(-p, s)$$

对于展开系数 b, d^* 等也采用类似的约定.

除了与时间无关的群速度之外，现在出现了正能解和负能解的交叉项，它以频率

$$\frac{2p_0c}{\hbar} > \frac{2mc^2}{\hbar} = 2\times 10^{21}\text{ 秒}^{-1}$$

随时间快速振动．这种快速振动，又叫颤振[1]，是与波包中负能解的振幅成正比的．暂时我们还没有这些解的物理解释，但我们可以提问：在什么时候可以期待它们在波包中以可观的振幅出现．由于 $b(p,s)$ 的时间无关性，自由粒子解 (3.30) 的一般形式显然表明：最初仅由正能解构成的一个波包，在无外力时不会发展出负能的分量．但是，代表最初以某种方式定域在空间有限范围内一个电子的一个波包总是含有两种符号能量的解．例如，考虑解

$$\psi(\mathbf{r},0,s) = (\pi d^2)^{-3/4}e^{-r^2/2d^2}w^1(0) \tag{3.32}$$

它相应于在时刻 $t=0$ 围绕原点半宽度 $\sim d$ 的一个高斯密度分布．在较晚的时刻 t，可以把它表示为波包(3.30)，而其系数 b 和 d^* 由初,始条件确定，即当 $t=0$ 时，

$$\int\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\sqrt{\frac{mc^2}{E}}\sum_{\pm s}[b(p,s)u(p,s)e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} + d^*(p,s)v(p,s)e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}] = (\pi d^2)^{-3/4}e^{-r^2/2d^2}w^1(0)$$

作 Fourier 变换并应用

$$\int_{-\infty}^{\infty}d^3r\,e^{-r^2/2d^2}e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{r}/\hbar} = (2\pi d^2)^{3/2}e^{-l^2d^2/2\hbar^2}$$

我们求得

$$\sqrt{\frac{mc^2}{E}}\sum_{\pm s'}[b(p,s')u(p,s') + d^*(-p,s')v(-p,s')]$$

---

1) E. Schrödinger, *Sitzber. Preuss. Akad. Wiss. Physik-Math.*, **24**, 418 (1930).

$$= \left(\frac{d^2}{\pi\hbar^2}\right)^{3/4} e^{-p^2d^2/2\hbar^2} w^1(0)$$

正交关系(3.11)给出

$$b(p, s) = \sqrt{\frac{mc^2}{E}} \left(\frac{d^2}{\pi\hbar^2}\right)^{3/4} e^{-p^2d^2/2\hbar^2} u^+(p,s) w^1(0)$$

$$d^*(-p, s) = \sqrt{\frac{mc^2}{E}} \left(\frac{d^2}{\pi\hbar^2}\right)^{3/4} e^{-p^2d^2/2\hbar^2} v^+(-p, s) w^1(0) \tag{3.33}$$

因此,波包(3.32)中的负能解的振幅 d^* 不为零. 同正能分量 b 相比,它以 v 的上边(小)分量与 u 的上边(大)分量之比、亦即以 $\sim pc/(E + mc^2)$ 而减小.这表明当动量 $\sim mc$ 时负能振幅是显著的. 但是,我们从(3.33)还可看到,波包主要是由动量 $p \leqslant \hbar/d$ 的成分组成,因此,在负能解明显地进入之前,这个波包必然是定域在与 Compton 波长相比拟的空间区域之内,也就是说,$d \sim \hbar/mc$[1]

在维次群上利用 $\Delta p \cdot \Delta x \sim \hbar$ 可以同样推得这个结果而无需参照特定的高斯型. 在讨论一些问题和相互作用时,如果电子的展布范围与其 Compton 波长相比为大时,我们可以忽略尚无解释的负能解的存在,并期望得到物理上有意义而且正确的解. 但是,在电子定域的距离与 $\hbar/mc$ 可比拟的情况下,这是不行的. 这时,负频率振幅将不可忽视、流中的颤振项将是重要的,的确我们将被包围在看来自相矛盾和左右为难的困境之中,而这些困难是不能够在迄今根据一个电子的 Dirac 理论所发展起来的框架内作出解释的. 这些困难中的一个著名例子是 Klein 佯谬[2],以下例说明之.

---

1) 关于正能量 Dirac 电子位置坐标的讨论见 T. D. Newton and E. P. Wigner, *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 400, (1949).

2) O. Klein, *Z. Physik*, **53**, 157 (1929).

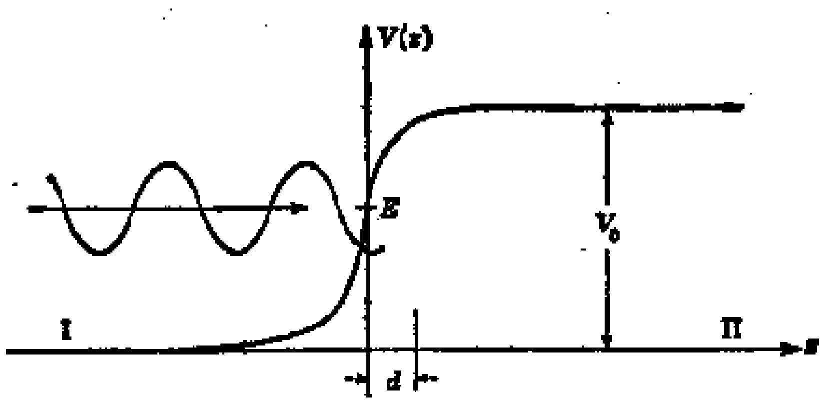


图 3.1 把能量为 E 的电子禁闭在左边区域 I 的势垒

为了定域电子，我们必须引进强大的外力把它们禁闭在预定的区域. 例如，假定我们需要把一个能量为 E 的自由电子禁闭在图 3.1 所示的一维势图中原点 $z=0$ 左侧的区域 I 中. 如果电子在区域 II 内，在 $z=0$ 右侧距离大于 d 处不能出现，则 V 必须要在 $z \lesssim d$ 的一个间隔内急剧上升到一个高度 $V_0 > E$，以使在区域 II 中的解以特征宽度 $\lesssim d$ 跌落. 这点和 Schrödinger 理论一样，一直到囚禁宽度 d 减至 $\sim \hbar/mc$ 和 $V_0 - E$ 增至超过 mc^2 为止. 为了看清这时发生了什么情况，让我们考虑有一尖锐边界的静电势(图3.2)，并计算一个波数

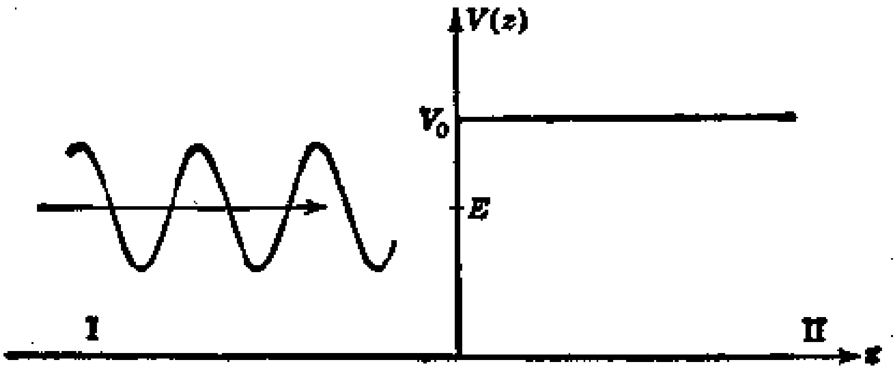


图 3.2 理想化为有一个尖锐边界的静电势，能量为 E 的入射自由电子波在区域 I 中向右运动。在 $V_0 > E + mc^2$ 时，来自势垒的反射流超过了入射流；这就是 Klein 佯谬的一个例子。

为 k、自旋沿 z 轴向上、从左方入射的电子的反射流和透射流. 在区域 I 中入射波和反射波的正能解可以写为

$$\psi_{\text{inc.}} = ae^{ik_1z}\begin{bmatrix}1\\0\\\dfrac{ck_1\hbar}{E+mc^2}\\0\end{bmatrix} \tag{3.34}$$

$$\psi_{\text{ref}} = be^{-ik_1z}\begin{bmatrix}1\\0\\-\dfrac{ck_1\hbar}{E+mc^2}\\0\end{bmatrix} + b'e^{-ik_1z}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\dfrac{ck_1\hbar}{E+mc^2}\end{bmatrix}$$

对于透射波，我们需要在存在外加常势场 $e\phi = V_0$ 情况下 Dirac 方程的解. 这些解与自由粒子解的区别仅在于替换 $p_0 = (1/c)(E - V_0)$，因此在区域 II 中

$$\begin{aligned}\hbar^2k_2^2c^2 &= (E - V_0)^2 - m^2c^4\\ &= (E - mc^2 - V_0)(E + mc^2 - V_0)\end{aligned}$$

因此，我们把正能 $(E > 0)$ 透射波写为

$$\psi_{\text{trans}} = de^{ik_2z}\begin{bmatrix}1\\0\\\dfrac{c\hbar k_2}{E-V_0+mc^2}\\0\end{bmatrix} + d'e^{ik_2z}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\dfrac{-c\hbar k_2}{E-V_0+mc^2}\end{bmatrix} \tag{3.35}$$

按照流守恒的要求，振幅 d 和 d' 由解在势边界处的连续性条件确定：

$$a + b = d$$

$$a - b = \frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{E + mc^2}{E - V_0 + mc^2} d \equiv rd \qquad (3.36)$$

$$b' = d' = 0 \quad \text{(没有自旋反转)}$$

若 $V_0 > 0$ 且 $|E - V_0| < mc^2$，则波数是虚数，$k_2 = +i|k_2|$，在区域 II 中的解是一个衰减的指数函数，相应于阻尼距离为 $d > \hbar/mc$. 但是，当我们将势垒的高度提高超过 $V_0 = E + mc^2$，以进一步囚禁电子时，透射波却变成振荡的. 透射流和反射流都能算出，并且我们求得

$$\frac{j_{trans}}{j_{inc}} = \frac{4r}{(1+r)^2} \quad \frac{j_{ref}}{j_{inc}} = \frac{(1-r)^2}{(1+r)^2} = 1 - \frac{j_{trans}}{j_{inc}} \qquad (3.37)$$

这些结果的形式固然使我们想起 Schrödinger 理论的类似予言，然而我们现在必须看到，由于(3.36)和上述条件 $V_0 > E + mc^2$，却有 $r < 0$. 因此，我们在(3.37)中发现一个与常规推理相矛盾的结果：透射流是负的，而反射流超过入射流，我们把势垒的高度 V_0 提高到超过 $E + mc^2$，本是为了把解定域化在一个 Compton 波长范围之内，但出现的却是非阻尼振荡解的结局. 我们如何理解这个结果？只有通过对负能解的理解和解释. 从波包的讨论可以清楚，负能解在定域化于 $\hbar/mc$ 范围之内的解中显得突出. 从上述关于流的计算同样看得清楚，我们关于实际过程的物理图象也在这些距离上失败了.

我们将从第五章开始着眼并解决这些问题. 在此之前，让我们来考察虽说有限，但范围仍是广阔的一些物理问题，在这些问题中，作用力在能量以 mc^2 为单位、距离以 $\hbar/mc$ 为单位的标度中是弱的并且平滑变化的. 这里我们可以期望发现

应用 Dirac 方程和正能电子理论的富有成果的场所。

习　　题

1. 以表示无关的方式直接从 Dirac 方程推导 (3.11)。
2. 证明 (3.9c) 与 Dirac 旋量的具体表象无关。
3. 在一般波包下推导流 (3.31)。
4. 验证 (3.36) 是流守恒的条件。
5. 求出在深度为 V_0、宽度为 a 的一维势阱里 Dirac 粒子的能级。
6. 验证完备性关系

$$\sum_{r=1}^{4} w_\alpha^r(\epsilon^r p) w_\beta^{r+}(\epsilon^r p) = \frac{E}{m}\delta_{\alpha\beta}$$

第四章　Foldy-Wouthuysen 变换

4.1　引言

除了负能问题以外，看来 Dirac 方程给电子提供了一个恰当的描述．它具有有意义的非相对论极限，它自动给出正确的磁矩．现在我们来研究 Dirac 电子与给定的外势的相互作用．特别是，我们将首先对低能性质感兴趣，以避免与迄今尚未解释的负能解有关的困难，后者本质上是一种相对论性特性．从上一章关于波包的讨论我们可以预计，实际上在诸如氢原子问题中负能解的作用是很小的，因为这时电子定域在半径[1]为 $1/\alpha_m \gg 1/m$ 的 Bohr 轨道上．

事实上，我们将会看到，从氢原子的 Dirac 方程推算出的定态能级与观察值极其精密的一致．但是，在指出 Coulomb 势中本征值问题的解以前，把 Dirac 理论变为另一种形式是有启发的．这种形式将电子与外场之间不同的相互作用项表为非相对论性的易于理解的形式．

然后，我们考虑由 Foldy 和 Wouth-uysen[2] 发展的一种系统化处理，即用一个正则变换把 Dirac 方程分解为两个二分量方程：其中一个在非相对论极限下简化为 Pauli 描述；另一个描写负能态．

---

1) 今后我们令 $\hbar = c = 1$．电子的 Compton 波长是 $1/m = 3.86 \times 10^{-11}$cm，静能 $m = 0.511$MeV，无量纲的精细结构常数是 $\alpha = e^2/4\pi \cong 1/137$．在这些单位中

$$0.511\text{MeV} = \frac{10^{11}}{3.86}\ \text{cm}^{-1} = \frac{10^{21}}{1.29}\ \text{秒}^{-1} = m.$$

2) L. L. Foldy and S. A. Wouthuysen, *Rhys. Rev*, 78, 29(1950)

4.2 自由粒子变换

作为 Foldy-Wouthuysen 变换的第一个范例，我们考虑一个自由电子的 Dirac 方程. 为此目的，最方便的是把它写为哈密顿形式，而把 $\boldsymbol{\alpha}$ 矩阵写成由方程 (1.17) 引入的表象. 我们寻求这样一个么正变换 U_F，它把所有使大、小分量耦合起来的算符（如 $\boldsymbol{\alpha}$）统统从方程中去掉. 我们把任何这类算符称为"奇的"，而把不使大、小分量耦合起来的算符称为"偶的"；因此，$\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\gamma}$、γ_5 等是奇的，而 1、β、$\boldsymbol{\sigma}$ 等是偶的.

把 U_F 写成 $U_F = e^{+iS}$，其中 S 是厄米的且不显含时间. 么正变换是

$$\psi' = e^{+iS}\psi$$

和
$$i\frac{\partial\psi'}{\partial t} = e^{+iS}H\psi = e^{+iS}He^{-iS}\psi' = H'\psi'$$

在结构上，H' 将不包括奇算符.

因为 $H = \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta m$ 且有 $\{\boldsymbol{\alpha},\beta\} = 0$，我们的问题十分类似于下述问题：试图找到一个么正变换，它把一个二分量自旋的哈密顿量 $\mathscr{H} = \sigma_z B_z + \sigma_x B_x$ 变为仅含有偶算符（即 1 和 σ_z）的形式. 这样一个变换不过是一个绕 y 轴的转动，而其算符是 $e^{+(i/2)\sigma_y\vartheta_0} = e^{+1/2\sigma_z\sigma_x\vartheta_0}$，且有 $\tan\vartheta_0 = B_x/B_z$. 这就启示了我们，在这种情况下一个供尝试的好算符应当是

$$e^{iS} = e^{\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\vartheta(p)} = \cos|\boldsymbol{p}|\vartheta + \frac{\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}\sin|\boldsymbol{p}|\vartheta$$

上式的右端是通过把指数函数展开为 ϑ 的幂级数而建立的.

在这种选择下 H' 变为

$$H' = \left(\cos|\boldsymbol{p}|\vartheta(p) + \frac{\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}\sin|\boldsymbol{p}|\vartheta(p)\right)$$

$$\cdot (\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m)\left(\cos|\boldsymbol{p}|\vartheta-\frac{\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}\sin|\boldsymbol{p}|\vartheta\right)$$

$$=(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m)\left(\cos|\boldsymbol{p}|\vartheta-\frac{\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}\sin|\boldsymbol{p}|\vartheta\right)^2$$

$$=(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m)\exp(-2\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\vartheta)$$

$$=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\left(\cos 2|\boldsymbol{p}|\vartheta-\frac{m}{|\boldsymbol{p}|}\sin 2|\boldsymbol{p}|\vartheta\right)$$

$$+\beta(m\cos 2|\boldsymbol{p}|\vartheta+|\boldsymbol{p}|\sin 2|\boldsymbol{p}|\vartheta)$$

为了消去奇算符，我们选择

$$\tan 2|\boldsymbol{p}|\vartheta=\frac{|\boldsymbol{p}|}{m}$$

变换后的哈密顿量是

$$H'=\beta\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2} \tag{4.1}$$

这可借助于图 4.1 的三角形作图法加以验证．新的哈密顿量正是在第一章中被摒弃的哈密顿量，只是有了重要的改变：现在负能量也被接受了．为了使 (4.1) 中的 H' 分解成为线性 Dirac 方程，我们必须付出负能量和四分量波函数的代价．

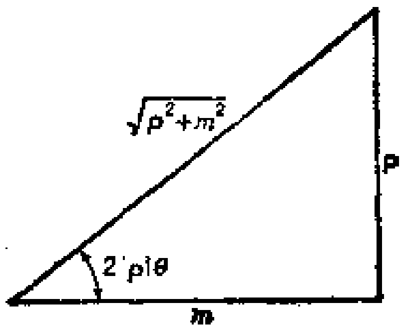


图 4.1　三角形作图法

4.3　一般变换

现在我们转向一个在给定外电磁场中的电子这一更普遍

的情况，并寻求相应的变换 S. 哈密顿量是

$$H = \alpha \cdot (p - eA) + \beta m + e\Phi$$
$$= \beta m + \theta + \varepsilon \tag{4.2}$$

其中 $\theta = \alpha \cdot (p - eA)$, $\varepsilon = e\Phi$; 如前一样，$\beta\theta = -\theta\beta$ 而且

$$\beta\varepsilon = +\varepsilon\beta$$

在(4.2)中出现的场，因之 H 本身，可以是与时间有关的．在一般情况下 S 也是与时间有关的，而且不可能像(4.1)中已做到的那样，构成一个算符 S，它把 H' 中所有各阶的奇算符都去掉．因此，我们满足于把变换后的哈密顿量做非相对论性展开成为 $1/m$ 的幂级数，只保留到阶为(动能$/m)^3$ 和(动能)(场能)$/m^2$ 的那些项．

我们再次通过下式引入变换

$$\psi' = e^{iS}\psi$$

求得

$$i\frac{\partial}{\partial t} e^{-iS}\psi' = H\psi = He^{-iS}\psi' = e^{-iS}\left(i\frac{\partial\psi'}{\partial t}\right)$$
$$+ \left(i\frac{\partial}{\partial t} e^{-iS}\right)\psi'$$

从而

$$i\frac{\partial\psi'}{\partial t} = \left[e^{iS}\left(H - i\frac{\partial}{\partial t}\right)e^{-iS}\right]\psi' = H'\psi'$$

因为 S 被展开为 $1/m$ 的幂级数，因而在非相对论极限下是"小"的，所以我们利用关系[1]

---

1) 此式可验证如下，考虑

$$F(\lambda) = e^{i\lambda S}He^{-i\lambda S} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\left(\frac{\partial^n F}{\partial\lambda^n}\right)_{\lambda=0} \tag{a}$$

由此得出

$$e^{+iS}He^{-iS}=H+i[S,H]+\frac{(i)^2}{2!}[S,[S,H]]+\cdots$$

$$+\frac{(i)^n}{n!}[S,[S,\cdots,[S,H]\cdots]+\cdots$$

把括号中的量展开为多重对易子的幂级数.因为$S=O(1/m)$，在所要求的精度阶数内，我们有

$$H'=H+i[S,H]-\frac{1}{2}[S,[S,H]]$$

$$-\frac{i}{6}[S,[S,[S,H]]]+\frac{1}{24}[S,[S,[S,[S,\beta m]]]]$$

$$-\dot{S}-\frac{i}{2}[S,\dot{S}]+\frac{1}{6}[S,[S,\dot{S}]]$$

作为构造 S 的开头，现在只考虑阶数为一的那些项：

$$H'=\beta m+\varepsilon+\theta+i[S,\beta]m \tag{4.3}$$

我们要求 (4.3) 中的奇项为零；记取我们从自由粒子情况下的行为中所得到的启示，我们选 $S=-i\beta\theta/2m$. 于是，在所要求的精度阶数内，我们求得

$$i[S,H]=-\theta+\frac{\beta}{2m}[\theta,\varepsilon]+\frac{1}{m}\beta\theta^2$$

$$\frac{i^2}{2}[S,[S,H]]=-\frac{\beta\theta^2}{2m}-\frac{1}{8m^2}[\theta,[\theta,\varepsilon]]-\frac{1}{2m^2}\theta^3$$

$$\frac{i^3}{3!}[S,[S,[S,H]]]=\frac{\theta^3}{6m^2}-\frac{1}{6m^3}\beta\theta^4$$

$$\frac{\partial F}{\partial\lambda}=e^{i\lambda S}i[S,H]e^{-i\lambda S}$$

从而

$$\frac{\partial^n F}{\partial\lambda^n}=e^{i\lambda S}i^n[S,[S,\cdots,[S,H]\cdots]]e^{-i\lambda S}$$

在 (a) 中令 $\lambda=1$，由此得出所求的恒等式.

$$\frac{i^4}{4!}[S,[S,[S,[S,H]]]]=\frac{\beta\theta^4}{24m^3}$$

$$-\dot{S}=+\frac{i\beta\dot{\theta}}{2m}$$

$$-\frac{i}{2}[S,\dot{S}]=-\frac{i}{8m^2}[\theta,\dot{\theta}]$$

将各个结果都考虑在内

$$\begin{aligned}H'=&\beta\left(m+\frac{\theta^2}{2m}-\frac{\theta^4}{8m^3}\right)+\varepsilon-\frac{1}{8m^2}[\theta,[\theta,\varepsilon]]\\&-\frac{i}{8m}[\theta,\dot{\theta}]+\frac{\beta}{2m}[\theta,\varepsilon]-\frac{\theta^3}{3m^2}\\&+\frac{i\beta\dot{\theta}}{2m}=\beta m+\varepsilon'+\theta'\end{aligned}\tag{4.4}$$

现在出现在(4.4)中的奇项仅是 $1/m$ 阶．为了把它们进一步化简，我们利用相同的规定

$$S'=\frac{-i\beta}{2m}\theta'=\frac{-i\beta}{2m}\left(\frac{\beta}{2m}[\theta,\varepsilon]-\frac{\theta^3}{3m^2}+\frac{i\beta\dot{\theta}}{2m}\right)$$

作第二次 Foldy-Wouthuysen 变换．在这个变换下我们求得

$$\begin{aligned}H''=&e^{iS'}\left(H'-i\frac{\partial}{\partial t}\right)e^{-iS'}=\beta m+\varepsilon'\\&+\frac{\beta}{2m}[\theta',\varepsilon']+\frac{i\beta\dot{\theta}'}{2m}=\beta m+\varepsilon'+\theta''\end{aligned}$$

其中 θ'' 现在是 $O(1/m^2)$．最后，通过第三次正则变换

$$S''=\frac{-i\beta\theta''}{2m}$$

这一项也可以用同一方法消去，最后结果是

$$H'''=e^{iS''}\left(H''-i\frac{\partial}{\partial t}\right)e^{-iS''}=\beta m+\varepsilon'$$

$$= \beta\left(m + \frac{\theta^2}{2m} - \frac{\theta^4}{8m^3}\right) + \varepsilon - \frac{1}{8m^2}[\theta[\theta, \varepsilon]]$$

$$- \frac{i}{8m^2}[\theta, \dot{\theta}]$$

在所要求的精度阶数内计算算符的积，我们求得

$$\frac{\theta^2}{2m} = \frac{(\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}))^2}{2m} = \frac{(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})^2}{2m} - \frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}$$

$$\frac{1}{8m^2}([\theta, \varepsilon] + i\dot{\theta}) = \frac{e}{8m^2}(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\Phi - i\boldsymbol{\alpha}\cdot\dot{\boldsymbol{A}})$$

$$= \frac{ie}{8m^2}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{E}$$

$$\left[\theta, \frac{ie}{8m^2}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{E}\right] = \frac{ie}{8m^2}[\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{E}]$$

$$= \frac{ie}{8m^2}\sum_{ij}\alpha_i\alpha_j\left(-i\frac{\partial E^j}{\partial x^i}\right) + \frac{e}{4m^2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{p}$$

$$= \frac{e}{8m^2}\operatorname{div}\boldsymbol{E} + \frac{ie}{8m^2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\operatorname{curl}\boldsymbol{E} + \frac{e}{4m^2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{p}$$

于是，到这一阶内约化的哈密顿量是

$$H''' = \beta\left(m + \frac{(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3}\right) + e\Phi - e\frac{1}{2m}\beta\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}$$

$$- \frac{ie}{8m^2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\operatorname{curl}\boldsymbol{E} - \frac{e}{4m^2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{p} - \frac{e}{8m^2}\operatorname{div}\boldsymbol{E} \qquad (4.5)$$

(4.5) 中的每一项都有直接的物理解释. 第一个括号中的诸项给出了

$$\sqrt{(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})^2 + m^2}$$

在所要求的阶数内的展开，表明了相对论性的质量增长. 第二项和第三项是静电偶极能和磁偶极能. 接下来的两项(它们合起来是厄米的)包括了自旋一轨道能量，而且它们在球对称静势中有一个非常熟悉的形式. 在这种情况下 $\operatorname{curl}\boldsymbol{E} = 0$

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{p}=-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}=-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{L}$$

而这一项就化为

$$H_{\text{自旋-轨道}}=\frac{e}{4m^2}\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{L} \tag{4.6}$$

方程(4.6)与考虑运动电子所经受的磁场 $\boldsymbol{B}'=-\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{E}$ 而得到的经典结果相一致。所以相互作用能预期应是

$$-\frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}'=\frac{e}{2m^2}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E})$$

然而，由于 Thomas 进动效应这项能量减小了一倍，并表明电子的轨道矩具有标准的迴转磁比 $g_e=1$.

最后一项——叫做 Darwin 项——可归因于颤振．因为电子坐标在距离 $\delta r\simeq 1/m$ 上涨落，它所看到的是有某些弥散的 Coulomb 势；改正是

$$\begin{aligned}\langle\delta V\rangle&=\langle V(\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r})\rangle-\langle V(\boldsymbol{r})\rangle\\&=\left\langle\delta r\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{1}{2}\sum_{ij}\delta r_i\delta r_j\frac{\partial^2 V}{\partial r_i\partial r_j}\right\rangle\\&\cong\frac{1}{6}\delta r^2\nabla^2 V\simeq\frac{1}{6m^2}\nabla^2 V\end{aligned} \tag{4.7}$$

在符号、形式和大小上定性地与 Darwin 项一致。

4.4 氢原子[1)]

我们转向讨论Dirac方程的束缚态解，特别是考虑Coulomb

---

1) 在 Coulomb 势中的本征解首先是下文给出的：C. G. Darwin, *Proc, Roy. Soc.* (London), **A118**, 654 (1928), 和 W. Gordon, *Z. Physik*, **48**, 11, (1928). 关于 Dirac 方程对于原子的应用的完整讨论和参考文献，见 H. A. Bethe *and* E. E. Salpeter, "*Quantum Mechanics of One-and Two-electron Atoms*", *Academic Press Inc.*, *New York*, 1957 和 M. E. Rose, "*Relativistic Electron Theory*", *John Wiley & Sons, Inc.*, *NewYork*, 1961.

场中电子的能级．对于这个问题，Dirac 方程是

$$H\phi = [\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta m + V(r)]\phi = E\phi \tag{4.8}$$

其中 $V = -Z\alpha/r$．为了分离变数，我们利用这一事实：在中心场中一个粒子的角动量是守恒的．显然 $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$ 与哈密顿量（4.8）对易，因此，我们可以构成 H，J^2 和 J_z 的共同本征函数．为此，我们求助于 Pauli 矩阵的经验，注意在第三章的表象中

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$$

用 Pauli 矩阵表示时是对角的．因此，如果我们用二分量旋量来构成 ϕ

$$\phi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

φ 和 χ 的解的角变数与 Pauli 二分量理论的角变数完全一样．二分量的角变数解是 J^2、J_z、L^2 和 S^2 的本征函数，分为两种类型：

对于 $j = l + 1/2$

$$\varphi_{jm}^{(+)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{l + 1/2 + m}{2l+1}}\, Y_l^{m-1/2} \\ \sqrt{\dfrac{l + 1/2 - m}{2l+1}}\, Y_l^{m+1/2} \end{pmatrix} \tag{4.9a}$$

对于 $j = l - 1/2$

$$\varphi_{jm}^{(-)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{l + 1/2 - m}{2l+1}}\, Y_l^{m-1/2} \\ -\sqrt{\dfrac{l + 1/2 + m}{2l+1}}\, Y_l^{m+1/2} \end{pmatrix} \tag{4.9b}$$

这里的球谐函数是依照规定 $Y^*_{l,m}=(-1)^m Y_{l,-m}$ 写出的，并且仅当 $l>0$ 时解 $\varphi^{(-)}$ 才存在. 以上两个解满足本征方程

$$J^2\varphi^{(\pm)}_{j,m}=j(j+1)\varphi_{j,m}.$$

和

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{\sigma}\varphi^{(\pm)}_{j,m}&=(J^2-L^2-3/4)\varphi^{(\pm)}_{j,m}\\&=-(1+\kappa)\varphi^{(\pm)}_{j,m}\end{aligned}$$

且有

$$\kappa=\begin{cases}-(l+1)=-(j+1/2) & j=l+1/2\\ \qquad +l=+(j+1/2) & j=l-1/2\end{cases}$$

因为它们的 l 值相差为 1，对于给定的 j 值它们的字称相反，并且能用一个奇字称的标量算符互相推出. 因为这个算符必须使 l 的值改变 1，它将是 $Y^m_l(\vartheta,\varphi)$ 的线性组合，从而正比于 $\boldsymbol{r}$. 可供我们选用的唯一的赝矢量是 $\boldsymbol{\sigma}$，将 $\boldsymbol{\sigma}$ 与 $\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ 点乘，我们构成了赝标量 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}/r$，并按照上述符号规定求得

$$\varphi^{(+)}_{j,m}=\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}}{r}\varphi^{(-)}_{j,m}\tag{4.10}$$

在 j, m 给定时，中心场问题的一般解是

$$\psi_{j,m}=\begin{pmatrix}\dfrac{iG^+_j}{r}\varphi^{(+)}_{j,m}+\dfrac{iG^-_j}{r}\varphi^{(-)}_{j,m}\\[2ex] \dfrac{F^+_j}{r}\varphi^{(-)}_{j,m}+\dfrac{F^-_j}{r}\varphi^{(+)}_{j,m}\end{pmatrix}$$

我们可以最终把这个解拆开成两个解，每个解各有一定的字称. 因为 $V(r)$ 在坐标反射下不变，我们知道能量本征函数可以和 (j,m) 一道分成字称本征态；因此我们构成了偶解和奇解，它们在变换 $\boldsymbol{x}'=-\boldsymbol{x}$ 下具有如下性质

$$\psi'(x')=\beta\psi(x)=\pm\psi(x')\tag{4.11}$$

这些解由下式给出

$$\psi_{j,m}^{l}=\begin{bmatrix}\dfrac{iG_{lj}}{r}\varphi_{j,m}^{l}\\ \dfrac{F_{lj}}{r}\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}}{r}\varphi_{j,m}^{l}\end{bmatrix}\tag{4.12}$$

其中作为通用的符号，我们引入了

$$G_{lj}=\begin{cases}G_j^+ & j=l+1/2\\ G_j^- & j=l-1/2\end{cases}\qquad F_{lj}=\begin{cases}F_j^+ & j=l+1/2\\ F_j^- & j=l-1/2\end{cases}$$

$$\varphi_{jm}^{l}=\begin{cases}\varphi_{jm}^{+} & j=l+1/2\\ \varphi_{jm}^{-} & j=l-1/2\end{cases}$$

并曾利用了(4.10). 按照(4.11)的规定，这些解的宇称是 $(-1)^l$. 借助于下述恒等式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\frac{f(r)}{r}\varphi_{jm}^{l}&=\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}}{r^2}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})\frac{f(r)}{r}\varphi_{jm}^{l}\\ &=\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}}{r^2}\left(\frac{1}{i}r\frac{\partial}{\partial r}+i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{L}\right)\frac{f(r)}{r}\varphi_{jm}^{l}\\ &=\left[\frac{1}{i}\frac{d}{dr}\frac{f(r)}{r}-i(1+\kappa)\frac{f(r)}{r^2}\right]\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}}{r}\right)\varphi_{jm}^{l}\end{aligned}$$

我们现在能够从(4.8)找出径向方程是：

$$\left(E-m+\frac{Z\alpha}{r}\right)G_{lj}(r)=-\frac{dF_{lj}(r)}{dr}+\frac{\kappa}{r}F_{lj}(r)$$

$$\left(E+m+\frac{Z\alpha}{r}\right)F_{lj}(r)=+\frac{dG_{lj}(r)}{dr}+\frac{\kappa}{r}G_{lj}(r)\tag{4.13}$$

这些方程的束缚态解可利用标准方法[1]求出. 我们只引录其中的一些结果.

能量本征值是

1) Darwin, Gordon, Bethe Salpeter, 和 Rose, 见前引.

$$E_n = m\left[1+\left(\frac{Z\alpha}{n-(j+1/2)+\sqrt{(j+1/2)^2-Z^2\alpha^2}}\right)^2\right]^{-1/2} \tag{4.14}$$

其中量子数 $n=1,2,\cdots,\infty$ 是一正整数，角动量本征值的变化范围是 0 到 $j+1/2\leqslant n$，且有 $0\leqslant l\leqslant n-1$ 的限制．把 (4.14) 展开为 $(Z\alpha)^2$ 的幂级数，我们看到 n 相应于非相对论性理论中的主量子数，

$$E_n \approx m\left\{1-\frac{1}{2}\frac{Z^2\alpha^2}{n^2}\left[1+\frac{(Z\alpha)^2}{n}\left(\frac{1}{j+1/2}-\frac{3}{4n}\right)\right]\right.$$
$$\left.+O((Z\alpha)^6)\right\} \tag{4.15}$$

基态能量是 $(n=1,\ j=1/2)$

$$E_0 = m\sqrt{1-Z^2\alpha^2} \cong m-(1/2)Z^2\alpha^2 m-(1/8)Z^4\alpha^4 m+\cdots$$

相应的自旋向上和自旋向下的归一化本征函数是

$$\psi_{n=1,j=1/2,\uparrow}(r,\vartheta,\varphi)$$
$$=\frac{(2mZ\alpha)^{3/2}}{\sqrt{4\pi}}\sqrt{\frac{1+\gamma}{2\Gamma(1+2\gamma)}}(2mZ\alpha r)^{\gamma-1}e^{-mZ\alpha r}$$
$$\times\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{i(1-\gamma)}{Z\alpha}\cos\vartheta \\ \dfrac{i(1-\gamma)}{Z\alpha}\sin\vartheta e^{i\varphi} \end{bmatrix}$$

$$\psi_{n=1,j=1/2,\downarrow}(r,\vartheta,\varphi)$$
$$=\frac{(2mZ\alpha)^{3/2}}{\sqrt{4\pi}}\sqrt{\frac{1+\gamma}{2\Gamma(1+2\gamma)}}(2mZ\alpha r)^{\gamma-1}e^{-mZ\alpha r}$$

$$\times\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{i(1-\gamma)}{Z\alpha}\sin\vartheta e^{-i\varphi} \\ \frac{-i(1-\gamma)}{Z\alpha}\cos\vartheta \end{bmatrix}$$

其中 $\gamma=\sqrt{1-Z^2\alpha^2}$. 在非相对论极限下，$\gamma\to 1$，$(1-\gamma)/Z\alpha\to 0$，它们约化为 Schrödinger 波函数乘以二分量 Pauli 旋量. 在相对论性情况下，我们看到，随着 $r\to 0$，ψ 显示了阶为 $(2mZ\alpha r)^{-(Z^2\alpha^2)/2}$ 的弱奇异性，这仅在距离为

$$r\sim\frac{1}{2mZ\alpha}e^{-2/Z^2\alpha^2}$$

时才显得重要. 对于 $Z\alpha\geqslant 1$，γ 是虚数而解呈现出振荡行为，使人想起 Klein 佯谬中出现的情况. 在这种情况下，正能谱与负能谱之间的间隙不复存在，我们又一次缺少解的物理解释.

在把能级(4.14)分类时，习惯上是用其非相对论符号来标记它们，即用在 ϕ^j_{lm} 中出现的轨道角动量 l 和总角动量 j. 在下表中我们列出为首的少数几项来 $2S_{1/2}$ 和 $2P_{1/2}$ 态是简并的，它们是相应于同样的 n 和 j 而宇称相反的两个态. $2P_{3/2}$ 态的能量高于 $2P_{1/2}$ 态；其能量差 $[m(Z\alpha)^4/32](1+O(Z\alpha)^2+\cdots)$ 是自旋——轨道相互作用(4.6)引起的精细结构分裂. 一般说来，按照(4.15)，n 给定时，j 越大的态能量越高.

这些预言和对氢原子的观察符合的怎么样? 在 1947 年以前，在对上述予言做了修改，以便将由于电子和质子自旋耦合而引起的各个能级的超精细分裂计算在内以后，符合是完全令人满意的. 在 1947 年，Lamb-Retherford 对氢原子精细

	n	l	j	E_{nj}
$1S_{1/2}$	1	0	1/2	$m\sqrt{1-Z^2\alpha^2}$
$2S_{1/2}$	2	0	1/2	$m\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-Z^2\alpha^2}}{2}}$
$2P_{1/2}$	2	1	1/2	$m\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-Z^2\alpha^2}}{2}}$
$2P_{3/2}$	2	1	3/2	$\frac{m}{2}\sqrt{4-Z^2\alpha^2}$

结构的测量[1]肯定了早些时候的猜测：能级 $2S_{1/2}$ 相对于2 $P_{1/2}$

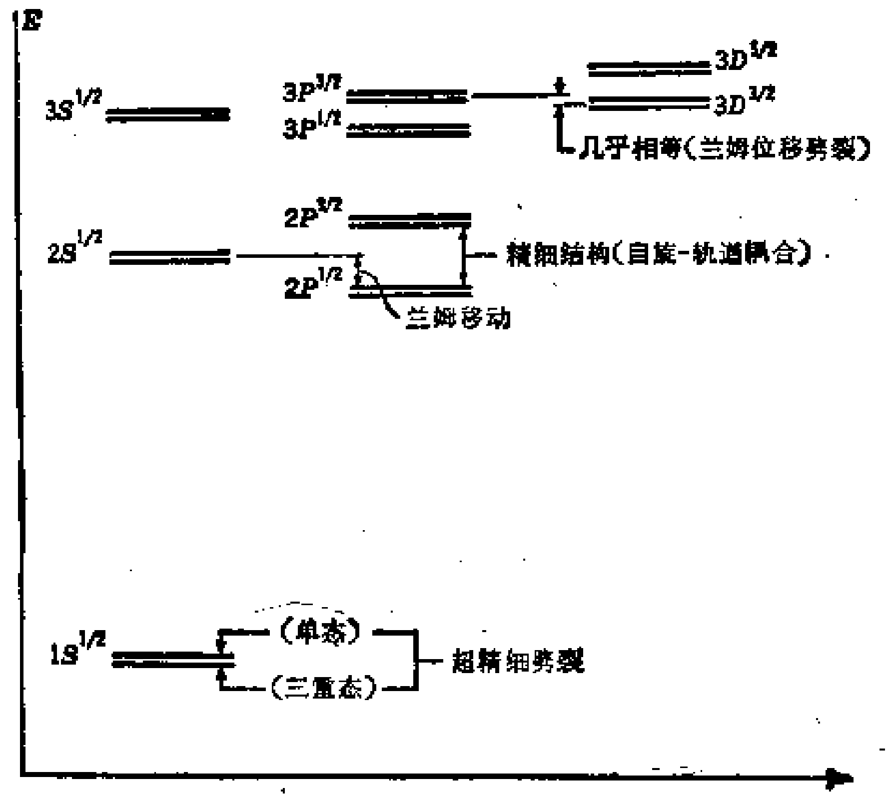


图 4.2　氢原子的低位能级．此图没有按比例画

1) W. E. Lamb, Jr., *and* R. C. Retherford, *Phys. Rev.*, **72**, 241(1957). 随后的工作可参看 Bethe *and* Salpeter，见前引；也可参看 W. E. Lamb, Jr., *Repts, Progr. Phys.*, **14**, 19(1951).

线有一向上的移位．这一“Lamb 移位”消除了 n 和 j 相同但 l 不同的能级间的简并，它是由于电子和量子化辐射场的涨落相互作用而产生的．超精细结构分裂和 Lamb 移位的测量和计算均已达到非常高的精确度而且符合得很好[1]．

超精细结构是由于质子与电子磁矩相互作用而产生的[2]．其效应是把所有的谱线分裂成为双线，相应于电子系统的 j 和质子的半整数自旋所组成的总角动量的两个可能的态．让我们对 S 态计算这个效应的大小．为此目的，电子的非相对论性描述已经足够．相互作用的形式是

$$H' = +\frac{|e|}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}$$

以及 $\boldsymbol{B} = \frac{g_p e}{2M_p}\int d^3r'\rho(r')\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{\nabla})\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$ 这里 $\boldsymbol{I}$ 是质子自旋算符 $(I_z = \pm 1/2)$，$\rho(r')$ 是质子的磁矩密度，这是因为事实上质子并不是一个质点．利用关系 $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{\nabla}) = \boldsymbol{I}\nabla^2 - (\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\nabla}$ 并对球对称波函数取角平均有

$$\nabla_i\nabla_j \Rightarrow 1/3\ \delta_{ij}\nabla^2$$

我们求得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= \frac{2}{3}g_p\frac{e}{2M_p}\int d^3r'\rho(r')\boldsymbol{I}\nabla^2\left(\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\\ &= -\frac{2}{3}g_p\frac{e}{2M_p}\boldsymbol{I}\rho(r)\end{aligned}$$

于是，在非相对论性理论中，能量移位由下式给出

---

1) 对当前情况的评述见 R. P. Feynmann, *Proc.* 1961 *Solvay Conf.*, *Interscience*, *New York*, 1962.

2) E. Fermi, *Z. Physik*, **60**, 320 (1930); Bethe *and* Salpeter, 见前引, p. 163.

$$\Delta E_n = (\psi_n H' \psi_n) = \frac{2}{3}\frac{g_p e^2}{4mM_p}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{I}\int d^3r\,\psi_n^*(r)\rho(r)\psi_n(r)$$

$$\approx \frac{1}{6}\frac{g_p e^2}{mM_p}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{I}|\psi_n(0)|^2$$

$$= \frac{1}{2}m\alpha^2\left[\frac{4}{3}g_p\frac{Z^3\alpha^2}{n^3}\left(\frac{m}{M_p}\right)\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{I}\right]$$

其中

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{I} = \begin{cases} +1/2 & \text{三重态} \\ -3/2 & \text{单态} \end{cases}$$

所以第 n 个 S 态能级的分裂是

$$\delta_n = \frac{1}{2}m\alpha^2\left[\frac{8}{3}g_p\frac{Z^3\alpha^2}{n^3}\left(\frac{m}{M_p}\right)\right]$$

和精细结构相比，δ_n 小了 m/M_p(质量比)倍.

Welton[1] 通过考虑非相对论性电子与电磁场真空涨落的相互作用，给出了 Lamb 移位的一个简单的定性描述. 因为电磁场的正常模的动力学与谐振子动力学等价，各模在量子化之后都有一个零点能 $\omega/2$. 这种量子效应的结果是：即使在没有加入外场时，现在也有涨落的电磁场. 虽然平均场强为零，它们的均方值却不为零，而这就导致由于电子位置坐标与场的耦合引起了电子位置坐标的均方涨落. 我们要估计的正是氢原子中束缚电子的这种涨落的振幅. 正如我们在讨论 Darwin 项 (4.7) 的来源时所看到的，这意味着由于电子看到的 Coulomb 势 $V(r)$ 的涨散而有一个附加的相互作用能 $1/6\langle(\delta r)^2\rangle\nabla^2 V$. 在最低一阶，由此导致的电子能级的改变是

1) T. A. Welton, *Phys. Rev.*, 74, 1157(1948)

$$\Delta E_n(\text{Lamb}) = \frac{1}{6}\langle(\delta r)^2\rangle \int \phi_n^* \nabla^2 V(r) \phi_n d^3 r$$

$$= \frac{2\pi}{3} Z\alpha \langle(\delta r)^2\rangle |\phi_n(0)|^2 \tag{4.16}$$

为了估计$\langle(\delta r)^2\rangle$，我们把电子当做经典的、非相对论性的荷电粒子来处理．电子在原子中的平衡坐标附近振动的运动方程是 $\delta \ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{e}{m}\boldsymbol{E}$，这里 $\boldsymbol{E}$ 是涨落电磁场． 对相应于ω的 Fourier 振幅，我们有

$$\delta r_\omega = -\frac{eE_\omega}{m\omega^2}$$

因而对其均方振幅

$$\langle(\delta r_\omega)^2\rangle = \frac{e^2\langle(E_\omega)^2\rangle}{m^2\omega^4}$$

和

$$\langle(\delta r)^2\rangle = \frac{e^2}{m^2}\int \frac{d\omega}{\omega^4}\langle(E_\omega)^2\rangle \tag{4.17}$$

为了计算均方场强，我们考虑总的真空场能量

$$\frac{1}{2}\int d^3x(E^2 + B^2) = \sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{\kappa}\frac{1}{2}\omega$$

其中λ的两个值代表两个横向极化模，而求和遍及一个大体积盒中的一切模

$$L^3 = \int d^3x \qquad \sum_{\kappa} \to \frac{L^3}{(2\pi)^3}\int d^3\kappa$$

因为对于自由电磁波 $\int d^3xE^2 = \int d^3xB^2$ 和 $\omega = |\boldsymbol{\kappa}|$，真空中的均方场强是

$$\langle E^2\rangle = \frac{1}{L^3}\int E^2 d^3x = 2\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\kappa\,\frac{\omega}{2}$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\int \omega^3 d\omega = \int d\omega \langle E_\omega^2 \rangle$$

代入到(4.17)，我们求得

$$\langle (\delta r)^2 \rangle = \frac{e^2}{2\pi^2 m^2}\int \frac{d\omega}{\omega} \tag{4.18}$$

其中对频率积分从0到∞．由于我们对电子的近似处理是粗糙的，积分在上、下限都发散．对定域于氢原子中的电子的准确的相对论性处理，情况就不是这样，大于 Bohr 半径～$(Z\alpha m)^{-1}$ 的那些波长将无效，因此必然有一个相应于此典型原子大小的最小感生振荡频率；因此，$\omega_{min} \sim mZ\alpha$．还有一个在距离～电子 Compton 波长 $1/m$ 处的高频截止，它来自电子的相对论性结构．这个结构相应于颤振振幅，它说明频率高于 $\omega_{max} \sim m$ 时将不能有效地晃动电子．因此，我们近似取 $\int d\omega/\omega \sim \ln(1/Z\alpha)$，并由(4.18)求得在真空场中振荡的均方振幅是

$$\langle (\delta r)^2 \rangle = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\ln\frac{1}{Z\alpha}\right)\left(\frac{1}{m}\right)^2 \tag{4.19}$$

由(4.16)，得出的能量移位是

$$\Delta E_n = \frac{4Z\alpha^2}{3}\left(\frac{1}{m}\right)^2 \ln\frac{1}{Z\alpha}\,|\psi_n(0)|^2$$

$$= \left[\frac{8}{3\pi}\frac{Z^4\alpha^3}{n^3}\left(\ln\frac{1}{Z\alpha}\right)\right](1/2\alpha^2 m)\delta_{l0}$$

$$\simeq 1000\ \text{mc/秒} \quad \text{当 } n = 2,\ Z = 1,\ l = 0$$

这说明了绝大多数对氢原子2 $S_{1/2}$ 能级测得的能移；对于 p 态和更高 l 的态，能移并不准确地为零，但要小得多，因为波函数在原点处为零．作为和通常的精细结构的比较，我们回顾哈密顿量(4.5)，看到 Lamb 项与 Darwin 项之比是 $(8\alpha/3\pi)\times[\ln(1/Z\alpha)]$，相应于均方涨落振幅(4.19)与颤振结构 ≃

$(1/m)^2$ 之比。

习　　题

1. 推导（4.10）

2. 描写质子或中子与外加电磁场相互作用的 Dirac 方程将有一附加的、代表其实测反常磁矩的磁矩相互作用

$$\left(i\not\partial - e_i \not A + \frac{\kappa_i e}{4M_i}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - M_i\right)\psi(x) = 0$$

其中

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}A^\mu - \frac{\partial}{\partial x_\mu}A^\nu$$

代表场强，定义于附录 I.

a. 对于质子，$i = p$，$e_p = |e|$；对于中子，$i = n$，$e_n = 0$。验证：选择 $\kappa_p = 1.79$ 和 $\kappa_n = -1.91$ 相应于实测磁矩，并验明附加的相互作用不影响方程的 Lorentz 协变性。再验明 Dirac 哈密顿量是厄米的，且当出现附加相互作用时几率仍是守恒的。

b. 对中子作 Foldy-Wouthuysen 变换，保留直到（4.5）的精度的项，并给出各项的物理解释。计算慢中子被外加静电场散射的截面。如何才能够测量它？[见 L. L. Foldy, *Rev. Mod. Phys.*, **30**, 471 (1958).]

3. 解出在均匀静磁场中一个 Dirac 电子的准确的能量本征值和本征函数。[见 L. D. Huff, *Phys, Rev.* **38**, 501(1931); M. H. Johnson *and* B. A. Lippman, *Phys. Rev.* **77**, 702(1950).]

4. 计算氢原子中一个电子的一级 Zeeman 效应(到 α^2 的最低一阶)。如果电子的迴转磁比不是 $g = 2$，Zeeman 能级如何改变(到差值 $g - 2$ 的第一阶)?

5. 讨论在外加静磁场中，具有反常磁矩 κ 的荷电 Dirac 粒子的自旋的进动。特别要证明自旋与轨道进动频率之差正比于 $g - 2$ 或 κ。它怎样依赖于粒子的质量?

[见 H. A. Tolhoek *and* S. R. de Groot, *Physica*, **17**, 17 (1951) K. M. Case, *Phys. Rev.*, **106**, 173L(1957)

H. Mendlowitz *and* K. M. Case, *Phys. Rev.*, **97**, 33, (1955).

M. Carassi, *Nuovo Cimento*, **7**, 524(1958).

V. Bargmann, L. Michel, *and* V. L. Telegdi, *Phys. Rev. Letters*, **2** 435(1959)

Louisell, Pidd, *and* Crane, *Phys. Rev.*, **94**, 7(1954).

Schupp, Pidd, *and* Crane, *Phys. Rev.*, **121**, 1(1961)

Charpak, Farley, Garwin, Muller, Sens, Telegdi, *and* Zichichi, *Phys. Rev. Letters*, **6**, 128(1961).]

6. 构造一附加的相互作用项，以代表 Dirac 粒子的可能的反常电偶极矩。宇称变换会怎样？这样一项对氢原子能级有什么效应？[见 G. Feinberg, *Phys. Rev.*, **112**, 1637(1958); E. E. Salpeter, *Phys. Rev.*, **112**, 1642(1958).]

7. 由于介子效应（在第十章中讨论），质子的电荷分布在空间延伸到$\sim 10^{-13}$cm 的小区域内。计算均方半径为 $r \cong 0.8\times 10^{-13}$cm 的这样一个电荷分布对氢原子能级的效应。将结果与 Lamb 移位作比较。

第五章 空穴理论

5.1 负能解问题

在我们以前的一些讨论中已经接触到 Dirac 方程的负能解；并且计算了，例如，负能解在构成一个定域化波包中的出现．但是，迄今为止，我们总设法避开去解释它们和理解它们的含义[1]．现在让我们正面地面向这些问题．

负能解之确实存在，要求对 Dirac 理论做有份量的重新解释，以避免原子中的电子向负能态做辐射跃迁并级联下去而湮没．如果我们完全忽略电子与辐射场的相互作用，这就不是问题．这时，我们可以和上一章一样计算定态解，并求出能量本征值和跃迁振幅，这一般地与实验符合得很好．但是如果我们想要计算原子的性质，达到要求把辐射相互作用考虑在内这样高度的精确性时，则保持电子不掉进负能态的问题不仅在原则上存在，在实际上也存在．处于氢原子基态的电子落到负能态的跃迁率，可以应用半经典辐射理论和第四章中求得的波函数来计算．电子跃迁到 $-mc^2$ 至 $-2mc^2$ 能量间的速率是

$$\sim \frac{2\alpha^6}{\pi}\frac{mc^2}{\hbar} \simeq 10^8 \text{秒}^{-1}$$

而如果把所有的负能态都考虑在内的话，就更要快的多．这显然是荒唐的．

如果要 Dirac 程仍然有效，我们就必须找到与单粒子

1) P.A.M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.*, (*London*), **A126**, 360 (1930). 又见 J. R. Oppenheimer, *Phys. Rev.*, **35**, 939 (1930).

Schrödinger 理论提出的办法不同的、对负能态的某种处理。1930 年，Dirac 为我们做了这件事．他提出了"空穴理论"，这个理论只是让电子按照 Pauli 不相容原理充满了负能级，就解决了负能解带来的困难．这样，真空态就是所有负能电子能级都被填满、所有正能级都空着的态．现在，例如，氢原子基态的稳定性得到了保证，因为根据 Pauli 不相容原理负能海不能再容纳更多的电子．

充满的负能电子海这一新假设有许多后果．如图 5.1 所示意，一个负能电子有可能吸收辐射而被激发到正能态．如果这事发生，我们将观察到一个电荷为 $-|e|$、能量为 $+E$ 的

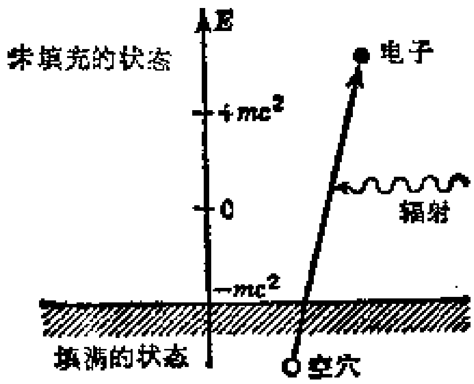


图 5.1　粒子偶产生：一个负能电子被辐射激发到正能态．

电子加上负能海中的一个空穴．空穴记录了一个电荷为 $-|e|$、能量为 $-E$ 的电子的空缺，并且可被观察者解释为相对于真空而言、一个电荷为 $+|e|$、能量为 $+E$ 的粒子、即正电子的出现．这是空穴理论解释电子偶产生的基础．相应地、负能海中的一个空穴，或一个正电子，是正能电子的一个陷阱，并导致电子-正电子偶湮灭而发出辐射，如图5.2所示．

我们看出，由于空穴理论，我们过渡到描写带两种符号电荷的粒子的多体理论，波函数不再具有单粒子理论的简单的几率解释，因为它现在还必须记述电子-正电子偶的产生和湮

灭。

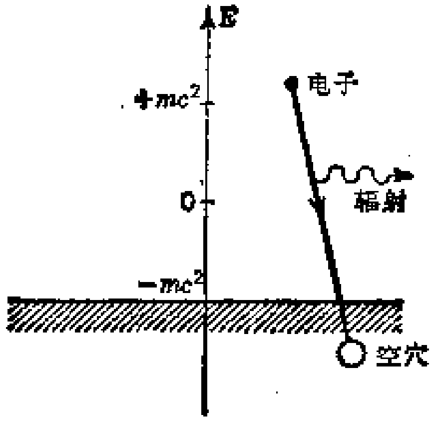


图 5.2 粒子偶湮灭：一个正能电子落进一负能空穴并发出辐射。

但是，回忆一下，我们已经放弃了 Klein-Gordon 方程，而 Dirac 方程的发展又是受建立一个单粒子理论的愿望推动的。因此，我们可能会问：为什么不再放弃 Dirac 理论呢？我们不愿意放弃它是出自这一简单的理由：现在我们已经在 Dirac 方程中揭示了一个意义深刻的"真理"实体——它高度精确地预言了正确的氢原子能谱和电子的 g 值。更有甚者，首先为理论所预言的正电子已被发现。

这样，最初由 Dirac 给出的论证的历史途径，已经导致了所希求的关于一个电子的运动方程；尽管我们现在已经重新解释了理论并从而抛弃了开始发展理论的动机。物理学的历史有这类进步范例的许多其他例子。因此，我们将保留 Dirac 方程和空穴理论解释，而放弃我们原来当作目标的单粒子几率解释。这里我们指出：回到二阶的 Klein-Gordon 方程，同样用适当地重新解释方程中的波函数的办法而把它挽救过来也应该是可能的。

Dirac 方程比 Klein-Gordon 方程的好处是：它正确地描述了自旋为 1/2、$g = 2$ 的电子。Klein-Gordon 方程适用于诸

如 π 介子等的零自旋粒子，这将在第九章中讨论．在两个方程中，对自由粒子我们都有不变的、二次能量-动量关系 $p_\mu p^\mu = m^2$．在两种情况下，我们都必须重新解释负能解以保证稳定的基态，而这就不可避免地导致既存在粒子、也存在反粒子．粒子由正能解描述——对于 Dirac 方程来说，是质量为 m、电荷为 $-|e|$ 的电子；反粒子由重新解释的负能解描述，在本例中，是质量为 m、电荷为 $+|e|$ 的正电子．

5.2 电荷共轭

这样，从空穴理论涌现了自然界中一种基本的、新的对称性：对于每个粒子都有一个反粒子，其中一个例子是，电子的存在意味着正电子的存在．现在我们来寻求这种对称性的表达形式；我们利用这种对称性，从与正电子相对应的、失去的负能电子的波函数出发，直接构成正电子的波函数．

依照我们的物理图象，负能海中的空穴记述了一个能量 $-E(E>0)$ 的空缺和一个电荷 e（对于电子，$e<0$）的空缺，它等价于能量为 $+E$ 和电荷为 $-e$ 的一个正电子的出现．因此，我们有一个 Dirac 方程

$$(i\nabla\!\!\!/ - eA\!\!\!/ - m)\psi = 0 \tag{5.1}$$

的负能解和正电子波函数之间的一一对应．因为按其解释，正电子表现为带正电的电子；正电子的波函数 ψ_c 将是方程

$$(i\nabla\!\!\!/ + eA\!\!\!/ - m)\psi_c = 0 \tag{5.2}$$

的正能解．

相反地，且从后来的认识来看，我们同样可以从正电子的 Dirac 方程 (5.2) 开始．在我们的考虑中，电荷的符号在哪儿也没起过实质性的作用．电子将通过空穴理论重新解释为 (5.2) 的负能解的空缺而出现．因此，不论对哪一符号的电荷，我们都有 (5.1) 和 (5.2) 的解之间的一一对应，并导致构

成一个把两个方程互相变换的算符.

首先我们看到,在从(5.1)变换到(5.2)时,必须改变 $i\nabla\!\!\!\!/$ 和 $A\!\!\!/$ 两项间的相对符号. 我们只需取复共轭: $i\partial/\partial x^\mu = -(i\partial/\partial x^\mu)^*$, $A_\mu = +A_\mu^*$, 就可最方便地将其实现. 这样做后,我们发现(5.1)变成

$$\left[\left(i\frac{\partial}{\partial x^\mu} + eA_\mu\right)\gamma^{\mu *} + m\right]\psi^* = 0 \tag{5.3}$$

如果我们现在能够找到一个非奇异矩阵,记作 $C\gamma^0$,具有如下的代数

$$(C\gamma^0)\gamma^{\mu *}(C\gamma^0)^{-1} = -\gamma^\mu \tag{5.4}$$

我们就将有所期望的形式

$$(i\nabla\!\!\!\!/ + eA\!\!\!/ - m)(C\gamma^0\psi^*) = 0$$

其中

$$C\gamma^0\psi^* = C\bar{\psi}^T = \psi_c \tag{5.5}$$

是正电子波函数. 可以用明显构成的办法验证: 存在着这样一个矩阵 C. 让我们在表象(2.6)中把它明显写出. 依照此表象, $\gamma^0\gamma^{\mu *}\gamma^0 = \gamma^{\mu T}$, 故(5.4)变成 $C\gamma^{\mu T}C^{-1} = -\gamma^\mu$, 或

$$C^{-1}\gamma^\mu C = -\gamma^{\mu T}$$

在这一表象中, C 必须要与 γ_1、γ_3 对易而与 γ_0、γ_2 反对易, 一个适当的选择是

$$C = i\gamma^2\gamma^0 = -C^{-1} = -C^\dagger = -C^T \tag{5.6}$$

上式足以用来构成在任何给定表象中的矩阵 C; 当把变换到任何其他表象的么正变换作用于这个 C 时, 将给出适合于新表象的矩阵. 我们还注意到: 在我们关于 C 的定义(5.6)中存在着一个位相的任意性; 以前已经讨论过宇称变换中的类似情况. 在目前的考虑中,波函数的位相在物理上是不重要的,我们就不再往下讨论了.

让我们仔细考察一下, 变换 $\psi_c = C\bar{\psi}^T = i\gamma^2\psi^*$ 对于一

个负能自由粒子本征函数的作用如何. 对于一个静止的、自旋向下的负能电子,我们有波函数

$$\psi^4 = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{+imt}$$

于是,相应的正电子解是

$$i\gamma^2\psi^{4*} = i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-imt}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-imt} = \psi^1 \tag{5.7}$$

这就是说,空缺一个自旋向下的静止负能电子等价于出现一个自旋向上的静止正能正电子. 在无外场情况下,电子与正电子间没有区别,而且我们从 (5.7) 看到,变换 (5.5) 正好构成了另一个电子解.

应用同样变换于任意一个自旋-动量本征态,利用$[C\gamma_5] = 0$ 和 $\gamma_5^T = \gamma_5 = \gamma_5^*$, 我们求得

$$\begin{aligned} \psi_c &= C\bar{\psi}^T = C\gamma_0\psi^* = C\gamma_0\left(\frac{\epsilon \not{p} + m}{2m}\right)^*\left(\frac{1 + \gamma_5 \not{S}}{2}\right)^*\psi^* \\ &= C\left(\frac{\epsilon \not{p}^T + m}{2m}\right)\left(\frac{1 - \gamma_5 \not{S}^T}{2}\right)\gamma_0\psi^* \\ &= \left(\frac{-\epsilon \not{p} + m}{2m}\right)\left(\frac{1 + \gamma_5 \not{S}}{2}\right)\psi_c \end{aligned} \tag{5.8}$$

我们再次看到：（取复共轭）×（以 $C\gamma_0 = i\gamma^2$ 作矩阵乘法）的运算，已经从以 4-动量 p_μ 和极化 s_μ 描写的负能解得出了以同样的 p_μ 和 s_μ 描写的正能解．用自由粒子旋量来表示，(5.5) 应读作

$$e^{i\phi(p,s)}v(p,s) = C\bar{u}^T(p,s)$$
$$e^{i\phi(p,s)}u(p,s) = C\bar{v}^T(p,s)$$

表明 $v(p,s)$ 和 $u(p,s)$ 是电荷共轭旋量，相差不超过一个相因子 $\phi(p,s)$．

回忆一下，Dirac 方程的解是这样构成的，使得

$$p_0 = +\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2} = E > 0$$

还要注意，在电荷共轭变换下 s 并不改变符号，但正如我们在 (5.7) 见到的，自旋确是反过来了．如在 3.2 节讨论过的，这个差别是基于下述事实：在静止系中投影算符具有形式 $(1 + \gamma_0\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{s}/2)$，（其中 $s^\mu = (0,\boldsymbol{s})$），符号的改变是从 γ_0 矩阵来的．

(5.5) 中的算符明白地构成了一个正电子波函数．我们可以从这个算符出发，用定义一个改变电磁场符号的附加算符的办法，发展一个对 Dirac 方程的不变运算．于是，这一系列指令：(1) 取复共轭，(2) 乘以 $C\gamma_0$ 和 (3) 将所有的 A_μ 换成 $-A_\mu$，就是 Dirac 方程的一个形式对称运算．它把电子[正电子]的方程 (5.1) [(5.2)] 变换成正电子[电子]的同样的方程，称为电荷共轭变换，记作 C．电荷共轭变换的物理内容是：对每一个物理上可实现的、一个电子处在势 $A_\mu(x)$ 中的态，都相应地存在着一个物理上可实现的、一个正电子处在势 $-A_\mu$ 中的态．于是，通过把 (5.1) 的一个正能解变换成为同一方程的负能解（即，按照空穴理论来说变为正电子），算符 C 就把自旋向上的正能电子变为自旋向上的正能正电子．

在场 $-A_\mu$ 中一个正电子的动力学与在场 $+A_\mu$ 中一个电

子的动力学完全一样，这从经典的考虑看来是毫不足怪的。我们从空穴理论引出的新奇结果是：如果存在着质量为 m、电荷为 e 的电子，就必然也存在着质量同样为 m、但有相反电荷 $-e$ 的正电子。

在自然界中观察到质量相同、电荷符号相反的两种电子，这的确是我们相信相对论性量子理论至少是部分正确的最强有力的支持之一。

5.3 真空极化

空穴理论，在消除了负能困难的同时，却引入了新的基本障碍需要克服，提出了新的物理预言要求用实验检验。例如，考虑真空对于电子电荷的定义、以及对于两个电荷相互作用的影响。一个正能电子以静电力排斥负能海中的电子，因此，它把它近旁的真空极化了，在图5.3中示意性地画出了电子的电荷密度 $\rho_0(\mathbf{r})$，以及（相对于真空而言）真空极化电荷密度 $\rho_p(\mathbf{r})$。一个宏观外场查觉到的电子电荷、或一个远距离的试验电荷查觉到的电子电荷是 $\int d^3r[\rho_0(\mathbf{r})+\rho_p(\mathbf{r})]=e$，即"物理电荷"。但是对探入到距离 $r_0<R$ 的试验电荷来说，表观电荷更负一些，直到随着 $r\to 0$，电荷变为 $\int d^3r\rho_0(\mathbf{r})=e_0$，即"裸电荷"，且有 $|e_0|>|e|$。在氢原子光谱中已观察到这种现象。电子的 s 能级相对于角动量 $l\neq 0$ 的那些能级变低了，因为 $l=0$ 的波函数使电子靠近质子。这一真空极化效应(在第八章中计算)稍微减小了 Lamb 移位。在第八章中我们还要处理如何把孤立电子的"裸电荷"与其在远距离的观测值联系起来的问题。

从空穴理论引起的另一个问题是：在我们所定义的真空

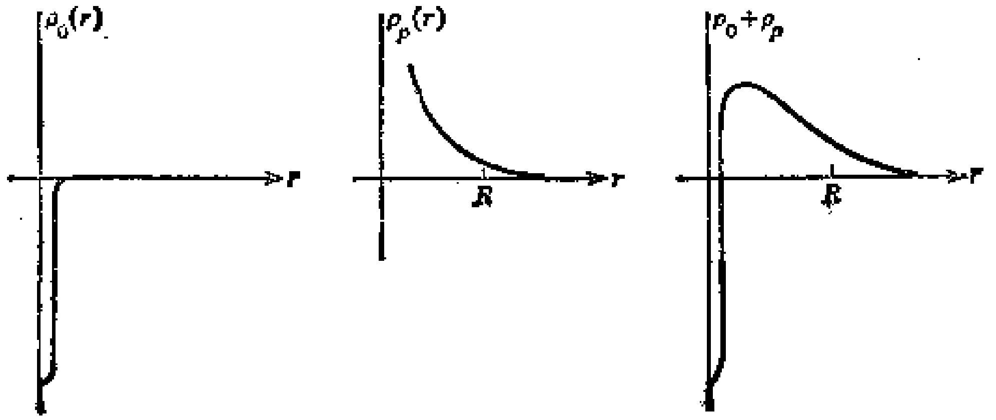


图 5.3 电子电荷密度的真空极化效应，ρ_0 是“裸”电子的电荷密度，ρ_p 是虚电子一正电子偶的感生极化“云”的电荷密度.

中，无穷大负总电荷的意义是什么？我们暂时避开这个问题，只是注意：这样一个分布所产生的电场没有什么优势方向可指. 只有真空极化引起的这种分布的不均匀性是可观察的[1].

5.4 时间反演以及其它对称性

现在让我们转向宇称变换和时间反演变换. 这些是在 Dirac 理论的正规 Lorentz 不变性的讨论中没有包括的对称运算. 如在第一章看到的，电磁规范不变性这一附加的对称性从耦合的形式，$p_\mu - eA_\mu$，来看是明显的. 它是用与 Schrödinger 理论中完全一样的方法验证的.

回忆一下，在 2.3 节中已经得出，宇称变换或空间反射变换可以表为

$$p\psi(\boldsymbol{x},t)=\psi'(\boldsymbol{x}',t')=e^{i\varphi}\gamma^0\psi(\boldsymbol{x},t)$$
$$\text{对于}\ \boldsymbol{x}'=-\boldsymbol{x},\qquad(5.9)$$

容易把 $\psi'(\boldsymbol{x}',t)$ 解释为空间反射解. 对于平面波解，宇称变换(5.9)使动量反向而保持自旋方向不变，这正和我们从经典

1) 这个问题在本书第二卷《相对论性量子场》中会再次讨论. (中译本即将出版)

观点所预料的一样．对波函数的这个变换，和对矢量势的(表示了其标量和矢量性质的)为人熟知的变换

$$p\phi(x, t) = \Phi'(x', t) = \Phi(x, t)$$
$$p\boldsymbol{A}(x, t) = \boldsymbol{A}'(x', t) = -\boldsymbol{A}(x, t)$$
$$\text{对于 } x' = -x \tag{5.10}$$

结合在一起，使 Dirac 方程和一切物理可观察量保持不变．Dirac 理论的宇称不变性的物理内容，可以简单地用对于一个由 $\psi(x, t)$ 描述的态的一组观测来表示．我们用照相机对准一个平面镜，镜中有实验按排的像，而把这组观察用电影记录下来．如果影片中我们所摄的镜像描述了一系列物理上可实现的现象，也就是说，如果我们不能从影片中观察到的事件序列，说出我们看的究竟是不是一个镜像，则我们说，做为我们的观察的基础的动力学在宇称变换下是不变的．为此目的，只需要考虑镜像便足够了，尽管它与空间反射不尽相同．镜子仅是把垂直于镜面的坐标反过来；而要实现宇称变换，还必须继之以绕法线转角为 π 的一个转动．但是，这样一个转动已经包括在我们关于正规 Lorentz 不变性的讨论之中了．

其次，我们转到时间反演不变性，它的物理内容可再次用电影来说明，而这电影是我们用来记录对由 $\psi(x)$ 描述的态的一组观察的．让我们把电影从后向前放映．如果这倒放的电影描写了一组物理上可实现的观察，我们就说作为这组观察的基础的动力学在时间反演下是不变的．如果我们能够把 t 变为 $t' = -t$ 并能实现一个变换，它重又得出 Dirac 方程的形式，并用同样的规则来解释这一形式，这个时间反演不变性就将得到保证．变换后的波函数将描写时间上逆向运动的原来的电子、并将是物理上可实现的，因为它满足 Dirac 方程．

为了构成所要求的时间反演变换，我们把 Dirac 方程写成哈密顿形式

$$i\frac{\partial\psi(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}=H\psi=[\boldsymbol{\alpha}\cdot(-i\boldsymbol{\nabla}-e\boldsymbol{A})$$

$$+\beta m+e\Phi]\psi(\boldsymbol{x},t) \tag{5.11}$$

并这样定义变换 $\mathscr{T}$，使得若 $t'=-t$，则 $\psi'(t')=\mathscr{T}\psi(t)$。于是 (5.11) 变为[1]

$$\frac{\partial}{\partial t'}(\mathscr{T}i\mathscr{T}^{-1})\psi'(t')=-\mathscr{T}H\mathscr{T}^{-1}\psi'(t') \tag{5.12}$$

而时间反演不变性要求或者 $\mathscr{T}H(t)\mathscr{T}^{-1}=-H(t')$，或者

$$\mathscr{T}i\mathscr{T}^{-1}=-i$$

为要研究在变换 $\mathscr{T}$ 之下H的行为，我们必须详细说明，当令 $t'=-t$ 时电磁势 A_μ 的行为。因为$\boldsymbol{A}$系由电流产生，而当时间变号时电流变号，故我们要求

$$\boldsymbol{A}'(t')=-\boldsymbol{A}(t)$$

类似地

$$\phi'(t')=+\phi(t) \tag{5.13}$$

因为它是由电荷产生；此外，$\boldsymbol{\nabla}'=+\boldsymbol{\nabla}$，因为 $\boldsymbol{x}'=+\boldsymbol{x}$。为要把(5.12)恢复到原来的形式，那末很明显，变换 $\mathscr{T}\cdots\mathscr{T}^{-1}$ 必须把 i 变为 $-i$；因此，$\mathscr{T}$ 可以写为形式：(取复共轭)×(随后乘以 4 × 4 常矩阵 T)：

$$\psi'(t')=T\psi^*(t) \tag{5.14}$$

这给出

$$i\frac{\partial\psi'(t')}{\partial t'}=\{(-T\boldsymbol{\alpha}^*T^{-1})\cdot[-i\boldsymbol{\nabla}'-e\boldsymbol{A}'(t')]$$

$$+(T\beta^*T^{-1})m+e\Phi'(t')\}\psi'(t')$$

在我们通常的表示 (1.17) 中，这意味着 T 必须与 α_2 和 β 对易而与 α_1 和 α_3 反对易；从而

---

1) 这里省去了无关紧要的对 x 的依赖。

$$T = -i\alpha_1\alpha_3 = +i\gamma^1\gamma^3 \tag{5.15}$$

是满足要求的；相因子再次是任意的。

为了说明变换 $\mathscr{T}$ 相应于经典意义下的时间反演，我们把 (5.14) 和 (5.15) 应用于一个正能自由粒子的平面波解

$$\begin{aligned}
&\mathscr{T}\left(\frac{\not p + m}{2m}\right)\left(\frac{1+\gamma_5\not s}{2}\right)\psi(\boldsymbol{x}, t) \\
&= T\left(\frac{\not p^* + m}{2m}\right)T^{-1}T\left(\frac{1+\gamma_5\not s^*}{2}\right)T^{-1}\psi'(\boldsymbol{x}, t') \\
&= \left(\frac{\not p' + m}{2m}\right)\left(\frac{1+\gamma_5\not s'}{2}\right)\psi'(\boldsymbol{x}, t')
\end{aligned} \tag{5.16}$$

其中 $p' = (p_0, -\boldsymbol{p})$，$s' = (s_0, -\boldsymbol{s})$，它们把自由粒子解投影成反向空间动量 $\boldsymbol{p}$ 和自旋 $\boldsymbol{s}$ 的解．这个运算称为 Wigner 时间反演，是在 1932 年首次引进的[1]。

因为空间坐标的反射 P 和时间坐标的反演 $\mathscr{T}$ 是理论的不变运算，在构成正电子波函数时，我们同样也可以把它们包括进去，只要我们想这样做．把 (5.9)、(5.14)、和 (5.15) 与 (5.5) 联合起来，我们发现在正电子波函数

$$\begin{aligned}
\psi_{PCT}(x') &= PC\gamma_0(\mathscr{T}\psi(x))^* = PC\mathscr{T}\psi(x) \\
&= ie^{i\varphi}\cdot\gamma_5\psi(x)
\end{aligned}$$

$$\text{其中 } x'_\mu = -x_\mu \tag{5.17}$$

与乘以 $ie^{i\varphi}\gamma_5$、并沿空-时逆向运动的电子波函数之间有一个简单的对应．对于以 (p^μ, s^μ) 和 $\epsilon = -1$ 表征的、自由粒子的自旋动量本征态 $\psi(x)$，我们看到

$$\begin{aligned}
\psi_{PCT}(x') &= ie^{i\varphi}\gamma_5\left(\frac{-\not p + m}{2m}\right)\left(\frac{1+\gamma_5\not s}{2}\right)\psi(x) \\
&= \left(\frac{\not p + m}{2m}\right)\left(\frac{1-\gamma_5\not s}{2}\right)\psi_{PCT}(x')
\end{aligned} \tag{5.18}$$

---

1) E.P. Wigner, *Göttinger Nachr.*, **31**, 546 (1932).

方程 (5.18) 只是在自旋的方向上与 (5.8) 不同，因而告诉我们，我们可以把正能正电子波函数想象为乘以 $ie^{i\varphi}\gamma_5$、并沿空时逆向运动的负能电子波函数.

对于有电磁力存在时的任意解，我们可以用回到负能本征值方程

$$[\boldsymbol{\alpha}\cdot(-i\nabla - e\mathbf{A}) + \beta m + e\Phi]\psi = -E\psi \quad (5.19)$$

并实现变换(5.17)的办法，来明显地验证这个解释. 显然，由(5.10) 和 (5.13)，在空时坐标反转 $x'_\mu = -x_\mu$ 之下，$A'_\mu(x') = +A_\mu(x)$；于是，(5.19) 取我们所希望的形式

$$[\boldsymbol{\alpha}\cdot(-i\nabla' + e\mathbf{A}'(x')) + \beta m - e\phi'(x')]\psi_{PCT}(x') = +E\psi_{PCT}(x')$$

把正电子作为沿空-时逆向运动的负能电子的解释，构成了正电子理论的 Stückelberg-Feynman 形式的基础[1]. 在以下各章中我们将常常把它用来发展扩散射理论，我们将发现它在那里有很大的用处.

最后，我们必须注意，电子与电磁场相互作用的结构受到电子的电动力学的经典极限和非相对论性极限两方面经验的支配. 我们所讨论的对称性的存在依赖于相互作用的形式. 例如，类型如第四章习题所讨论的、质子和中子的反常矩相互作用给 Dirac 方程增添了一个形如 $\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\psi$ 的项. 这一项的出现对上述对称性一概没有影响. 在把 Dirac 方程推广到其他自旋为 1/2 的粒子、例如 μ 介子和核子，以及推广到其他熟知的相互作用时，假定这些对称性 $\mathscr{T}$、C、P 仍然保持有效是非常自然的.

李政道和杨振宁[2]的重大贡献在于：他们认识到，这的确

1) E. C. G. Stückelberg, *Helv. Phys. Acta,* **14,** 32L 588 (1941); R.P. Feynmann, *Phys. Rev.*, **76,** 749, 769 (1949).

2) T.D. Lee *and* C.N. Yang, *Phys. Rev.*, **105,** 1671, (1957).

是一个有待实验检验的假定，并提出诸如 β 衰变等相互作用破坏了 P 和 C 的对称性．但是在运算 $\mathscr{T}CP$ 之下的对称性，由正规 Lorentz 不变性以及自旋与统计性之间的通常联系这两个弱得多的假定而得到了保证．

习　　题

1．证明：一个氢原子基态中的电子发生辐射并落入 $-mc^2$ 至 $-2mc^2$ 能量区间中空的负能态的速率（用 Born 近似处理）近似地为 $2\alpha^6 mc^2/\pi\hbar \approx 10^8$ 秒$^{-1}$．

2．应用空穴理论的概念，重新解释并解决第三章中的 Klein 佯谬．

3．证明：若 γ_μ 和 γ'_μ 是 γ 矩阵的两个表象，它们由一个幺正变换 U 联系起来，使得 $\gamma_\mu = U\gamma'_\mu U^{-1}$，则 $C' = (U^T)^{-1}CU$，其中 C 和 C' 是电荷共轭变换的相应矩阵．关系式（5.6）对 C' 是否有效？

用类似的方法，使（5.15）式不再依附于 γ 矩阵的表象（1.17）．

4．为了使 $\mathscr{T}$ 成为 Dirac 理论的对称运算，波函数 $\psi'(t')$ 的解释规则必须与 $\psi(t)$ 的解释规则相同．这意味着由 ψ' 和 ψ'^{+} 的双线性形式组成的可观察量必然同由 ψ 和 ψ^{+} 的双线性形式组成的可观察量有相同的解释（与可观察量相适应，最多差一符号）．

a．验明这对电流

$$j'_\mu(x') = j^\mu(x)$$

是对的，再验明

$$\langle r\rangle' = \langle r\rangle \quad \langle p\rangle' = -\langle p\rangle$$

b．对电荷共轭变换 C 重复这些运算．特别是，证明

$$\bar{\psi}_c(x)\gamma_\mu\psi_c(x) = +\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$$

并用空穴理论进行解释．

第六章 传播子理论

6.1 引言

我们转向散射过程的一般讨论．我们的目的是要能够利用电子与正电子的 Dirac 理论来计算跃迁速率和截面．这种计算在原则上是准确的；在实际上，只计算到按相互作用参数展开的低阶项．在诸如电子—正电子偶的产生和湮灭等过程中改变粒子数目的可能性使我们超出了非相对论的讨论范围．但是，我们将尽可能地把为要将粒子的产生和湮灭包容在内而发展量子化场论形式这一巨大的任务推迟．

为此目的，我们仿照 Feynman[1] 来发展传播子方法．散射过程用积分方程来描写．方程解的边条件体现了 Stückelberg-Feynman 把正电子看做沿时间逆向运动的负能电子的物理解释．从这一表述得出了一个对所有物理过程都具有明确计算规则的实用性理论[2]．作为开始，我们重温非相对论性 Schrödinger 方程的传播子方法．

6.2 非相对论性传播子

在散射问题中，我们的注意力集中于：从在很久以前加上的初始条件开始的、随时间而发展的波动解，而不是定态能量本征函数，即驻波解．特征的是，给定一个波包，它代表一个在很久以前向势趋近的粒子，我们问：在很久以后波将是

---

1) R. P. Feynman, *Phys. Rev.*, **76**, 749, 769,(1949).

2) 这些规则的量子场论基础见本书第二卷《相对论性量子场》，中译本即将出版．

什么样子.

我们转到 Huygens 原理作为体现这一过程的例子. 如果波函数 $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ 在某一特定时刻 t 为已知，则将时刻 t 空间各点 $\boldsymbol{x}$ 都看做由 $\boldsymbol{x}$ 向外传播的球面波波源，便可求得以后任何时刻 t' 的波函数. 由点 $\boldsymbol{x}$ 出发、在时刻 t' 到达点 $\boldsymbol{x}'$ 的波幅强度正比于原来的波幅 $\psi(\boldsymbol{x}, t)$. 如果我们把比例常数记作 $iG(\boldsymbol{x}', t'; \boldsymbol{x}, t)$，则按照 Huygens 原理，在时刻 t' 到达点 $\boldsymbol{x}'$ 的总波是[1]

$$\psi(\boldsymbol{x}', t') = i\int d^3x G(\boldsymbol{x}', t'; \boldsymbol{x}, t)\psi(\boldsymbol{x}, t) \quad t' > t \quad (6.1)$$

$G(\boldsymbol{x}', t'; \boldsymbol{x}, t)$ 称为 Green 函数或传播子，它按照 Huygens 原理给我们描写了在时刻 t 点 $\boldsymbol{x}$ 的 ψ 的大小对于 $\psi(\boldsymbol{x}', t')$ 的影响. 知道 G，我们就能够从任何给定的初态构成随时间发展的物理解，从而等价于 Schrödinger 方程的完全解决.

我们仍须给出 G 的一个完全形式的定义. 至此我们仅仅是在物理论证的基础上断言了 G 的存在. 让我们继续论证下去，以求得到对传播子方法有一个更好的理解. 首先考虑一个自由波解. 自由粒子的运动是完全已知的，因此，相应的自由粒子 Green 函数 G_0 可以明显地构成也应不足为怪. 如果我们现在引入一个势，G_0 将被修正. 令 $V(\boldsymbol{x}_1, t_1)$ 代表一个相互作用势，它在 t_1 附近一个很短的时间间隔 Δt_1 内被“加入”. 在早于 t_1 的时间里，波函数将是一个自由波 φ 的波函数，而相应的传播子将是 G_0. 然而，按照 Schrödinger 方程

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t_1} - H_0\right)\psi(\boldsymbol{x}_1, t_1) = V(\boldsymbol{x}_1, t_1)\psi(\boldsymbol{x}_1, t_1) \quad (6.2)$$

$V(\boldsymbol{x}_1, t_1)$ 起着新波源的作用.

---

1) 可以应用 Huygens 原理而无需 Kirchoff 修正，这是由于 Schrödinger 方程中时间导数是一阶的.

上式右边在间隔 Δt_1 之内是异于零的. 它在 Δt_1 时间内产生 ψ 的一个附加改变, 加在 V 不出现时的 ψ 之上. 这一附加改变可用对 (6.2) 积分到 Δt_1 的一阶而求得.

$$\Delta\psi(\boldsymbol{x}_1, t_1) = -iV(\boldsymbol{x}_1, t_1)\varphi(\boldsymbol{x}_1, t_1)\Delta t_1 \tag{6.3}$$

根据 Huygens 原理和 (6.1), 这个附加波导致在未来时刻 t' 对 $\psi(\boldsymbol{x}', t')$ 的新贡献, 它是

$$\Delta\psi(\boldsymbol{x}', t') = \int d^3x_1 G_0(\boldsymbol{x}', t'; \boldsymbol{x}_1, t_1)V(\boldsymbol{x}_1, t_1)\varphi(\boldsymbol{x}_1, t_1)\Delta t_1 \tag{6.4}$$

因此, 从很久以前的一个任意波包 φ 发展而来的波 ψ 是

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{x}', t') &= \varphi(\boldsymbol{x}', t') \\ &\quad + \int d^3x_1 G_0(\boldsymbol{x}', t'; \boldsymbol{x}_1, t_1)V(\boldsymbol{x}_1, t_1)\varphi(\boldsymbol{x}_1, t_1)\Delta t_1 \\ &= i\int d^3x [G_0(\boldsymbol{x}', t'; \boldsymbol{x}, t) \\ &\quad + \int d^3x_1 \Delta t_1 G_0(\boldsymbol{x}', t'; \boldsymbol{x}_1, t_1)V(\boldsymbol{x}_1, t_1) \\ &\quad \times G_0(\boldsymbol{x}_1, t_1; \boldsymbol{x}, t)]\varphi(\boldsymbol{x}, t)\end{aligned} \tag{6.5}$$

和 (6.1) 相比, 我们看到这里的 Green 函数由下式给出

$$\begin{aligned}G(\boldsymbol{x}', t'; \boldsymbol{x}, t) &= G_0(\boldsymbol{x}', t'; \boldsymbol{x}, t) \\ &\quad + \int d^3x_1 \Delta t_1 G_0(\boldsymbol{x}', t'; \boldsymbol{x}_1, t_1)V(\boldsymbol{x}_1, t_1)G_0(\boldsymbol{x}_1, t_1; \boldsymbol{x}, t)\end{aligned} \tag{6.6}$$

它可用图 6.1 的空—时图解来说明. 第一项(图 6.1a)表示作为自由粒子从 $(\boldsymbol{x}, t)$ 到 $(\boldsymbol{x}', t')$ 的传播; 图 6.1b 表示: 从 $(\boldsymbol{x}, t)$ 到 $(\boldsymbol{x}_1, t_1)$ 的自由传播, 在 $(\boldsymbol{x}_1, t_1)$ 的一次散射, 和从 $(\boldsymbol{x}_1, t_1)$ 到 $(\boldsymbol{x}', t')$ 的自由传播.

如果我们在 $t_2 > t_1$ 处的时间间隔 Δt_2 内加入另一势 $V(\boldsymbol{x}_2, t_2)$ 则与 (6.4) 类似, 在 $t' > t_2$ 时对 $\psi(\boldsymbol{x}', t')$ 的附加贡献是

$$\begin{aligned}\Delta\phi(x') &= \int d^3x_2 G_0(x';2)V(2)\phi(2)\Delta t_2 \\ &= i\int d^3x d^3x_2\Delta t_2 G_0(x',2)V(2)\times[G_0(2,x) \\ &\quad + \int d^3x_1\Delta t_1 G_0(2,1)V(1)G_0(1;x)]\varphi(x)\end{aligned} \tag{6.7}$$

上式用了缩写符号，其意义应当是清楚的. 第一项用图解(图 6.1c) 来说明，它表示在 t_2 的单次散射；第二项是两次散射改正，用图 6.1d 说明.

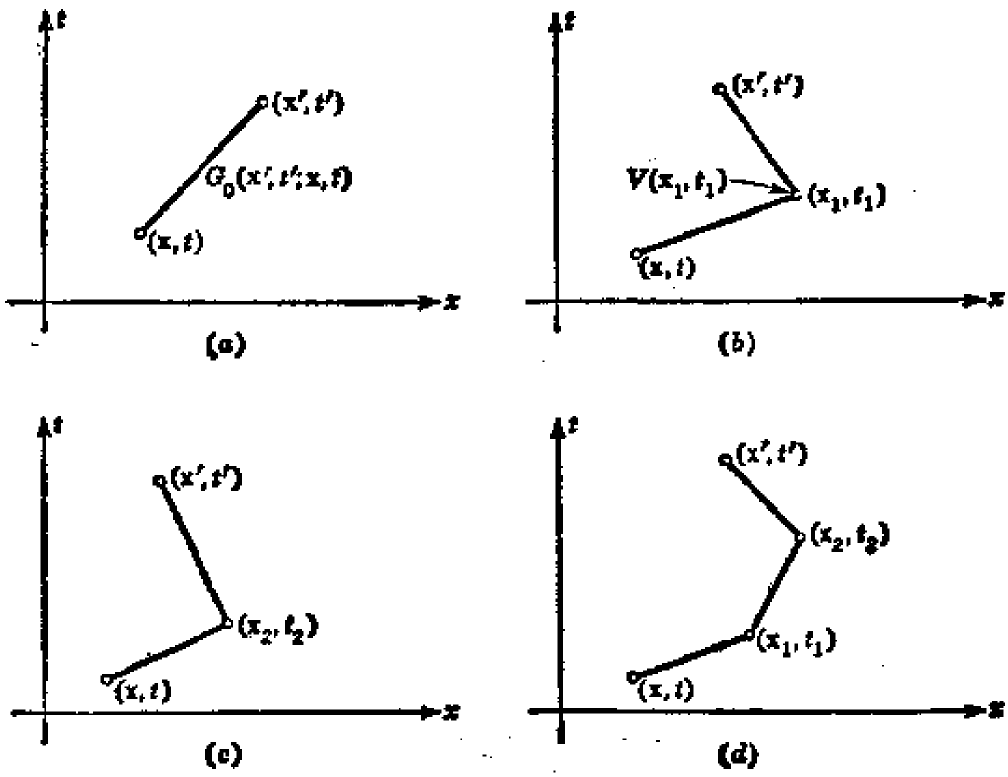


图 6.1 从 ($\boldsymbol{x}$, t) 到 ($\boldsymbol{x}'$, t') 传播的空时图解，(a) 一个自由粒子，(b) 在 ($\boldsymbol{x}_1$, t_1) 被势 $V(\boldsymbol{x}_1, t_1)$ 作一次散射，(c) 在 ($\boldsymbol{x}_2$, t_2) 作单次散射，以及 (d) 作两次散射

把 (6.5) 代入到 (6.7) 右边的 $\phi(2)$，并把得到的 $\Delta\phi$ 加到 (6.5)，便可组成到达 ($\boldsymbol{x}'$, t') 的总波：

$$\phi(x') = \varphi(x') + \int d^3x_1\Delta t_1 G_0(x';1)V(1)\varphi(1)$$

$$+ \int d^3x_2\Delta t_2 G_0(x';2)V(2)\varphi(2)$$

$$+ \int d^3x_1\Delta t_1 d^3x_2\Delta t_2 G_0(x';2)V(2)G_0(2;1)$$

$$\times V(1)\varphi(1) \tag{6.8}$$

依此类推，如果有 n 个这样的时间间隔加入了势 V，到达 $(\boldsymbol{x}', t')$ 的波是

$$\phi(x') = \varphi(x') + \sum_i \int d^3x_i\Delta t_i G_0(x';x_i)V(x_i)\varphi(x_i)$$

$$+ \sum_{\substack{ij\\(t_i>t_j)}} \int d^3x_i\Delta t_i d^3x_j\Delta t_j G_0(x';x_i)V(x_i)G_0(x_i;x_j)$$

$$\times V(x_j)\varphi(x_j)$$

$$+ \sum_{\substack{ijk\\(t_i>t_j>t_k)}} \int d^3x_i\Delta t_i d^3x_j\Delta t_j d^3x_k\Delta t_k G_0(x';x_i)$$

$$\times V(x_i)G_0(x_i;x_j)V(x_j)G_0(x_j;x_k)V(x_k)\varphi(x_k) + \cdots \tag{6.9}$$

与 (6.5) 和 (6.6) 相比较，可知与 Green 函数 G 相应的表达式是

$$G(x';x) = G_0(x';x)$$

$$+ \sum_i \int d^3x_i\Delta t_i G_0(x';\boldsymbol{x}_i,t_i)V(\boldsymbol{x}_i,t_i)G_0(\boldsymbol{x}_i,t_i;x)$$

$$+ \sum_{\substack{ij\\(t_i>t_j)}} \int d^3x_i\Delta t_i d^3x_j\Delta t_j G_0(x';\boldsymbol{x}_i,t_i)V(\boldsymbol{x}_i,t_i)$$

$$\times G_0(\boldsymbol{x}_i,t_i;\boldsymbol{x}_j,t_j)V(\boldsymbol{x}_j,t_j)G_0(\boldsymbol{x}_j,t_j;x) + \cdots \tag{6.10}$$

如果我们定义当 $t' < t$ 时 $G_0(\boldsymbol{x}',t';\boldsymbol{x},t) = 0$，我们便可除去时序限制 $t_i > t_j$，等等．加上波只能沿时间正向传播

这一边界条件，G_0 便称为推迟传播子. 物理上这正是意味着：直到 t_i 为止都没有来自第 i 次迭代(在时刻 t_i)的 Huygens 子波出现.

在连续相互作用的极限下，对时间间隔的求和可以用对 dt 的积分来代替，结果是

$$G(x';x)=G_0(x';x)+\int d^4x_1G_0(x';x_1)V(x_1)G_0(x_1;x)$$

$$+\int d^4x_1d^4x_2G_0(x';x_1)V(x_1)G_0(x_1;x_2)V(x_2)$$

$$\times G_0(x_2;x)+\cdots \tag{6.11}$$

其中 $$d^4x=d^3xdx_0=d^3xdt$$

我们假定这个多次散射级数是收敛的[1]，并可以形式地求和而给出

$$G(x';x)=G_0(x';x)+\int d^4x_1G_0(x';x_1)V(x_1)G(x_1;x) \tag{6.12}$$

我们注意到，正如我们的因果性基本概念所要求的那样，对于 $t'<t$，不仅 $G_0(x';x)$ 为零，而且 $G(x';x)$ 也为零.

方程 (6.11) 给了我们通过 V 和 G_0 来求得 G 的一个迭代手续，从而也给了我们在知道了较早时刻的 $\psi(\mathbf{x},t)$ 时，构成波函数 $\psi(\mathbf{x}',t')$ 的迭代手续. 特别是，要解决散射问题，当给定一个代表在很久以前向相互作用区域趋近的粒子的波包 $\varphi(\mathbf{x},t)$ 时，我们必须知道在很久以后的波. 为了适当地定义散射问题，在此初始时刻应当没有相互作用，以使 φ 是自由粒子方程的一个解，并满足所要求的初始条件.

达到这个目的的数学上方便的办法是：在 $t\to-\infty$ 时绝热地撤去 $V(\mathbf{x},t)$ 以使相互作用在时间上定域化[2]；这样，

1) 这里我们不考虑在势 V 中束缚态的可能性.

2) 我们同样可以建立在空间上定域、且在初始时远离相互作用区域的波包.

准确解 ψ 在遥远的过去就逼近于 φ 而且没有散射波. 在未来,波 $\psi(\boldsymbol{x}', t')$ 由 (6.1) 给出

$$\psi(\boldsymbol{x}', t') = \lim_{t\to-\infty} i\int d^3x G(\boldsymbol{x}', t'; \boldsymbol{x}, t)\varphi(\boldsymbol{x}, t) \quad (6.13)$$

按 (6.12) 将 G 用 G_0 表出,我们看到

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{x}', t') &= \lim_{t\to-\infty} i\int d^3x\Big[G_0(\boldsymbol{x}', t'; \boldsymbol{x}, t) \\ &\quad + \int d^4x_1 G_0(\boldsymbol{x}', t'; 1)V(1)G(1; \boldsymbol{x}, t)\Big]\varphi(\boldsymbol{x}, t) \\ &= \varphi(\boldsymbol{x}', t') + \int d^4x_1 G_0(\boldsymbol{x}', t'; \boldsymbol{x}_1, t_1)V(\boldsymbol{x}_1, t_1) \\ &\quad \times \psi(\boldsymbol{x}_1, t_1) \end{aligned} \quad (6.14)$$

我们实际上还没有解决任何问题,因为未知的 ψ 出现在右边的积分号下. 然而,我们的确有了一个表述,它包含了所希望的边界条件,并且在微扰势 V 弱时,它提供了一个直接的近似手续.

我们主要感兴趣的是当 $t'\to\infty$ 时散射波的形式. 在这个极限下,粒子从相互作用区域挣脱出来,而 ψ 再次变成自由粒子方程的解. 如前一样,当 $t'\to+\infty$ 时我们绝热地撤去相互作用,以保证这一条件. 关于散射波的全部信息都可以由:粒子从给定的入射波 φ_i 出发,当 $t'\to+\infty$ 时到达各末态自由态 φ_f

$$\varphi_f(\boldsymbol{x}', t') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\boldsymbol{k}_f\cdot\boldsymbol{x}'-i\omega_f t'} \quad (6.15)$$

的几率幅而得到;特别是,我们可以应用平面波[1]来进行处理.

---

1) 在 (6.15) 中平面波解是用连续统的语言归一化的. 另一方面,还可以用箱归一化的约定,而有 $(2\pi)^{-3/2}\to V^{-1/2}$ 其中,V 是物理相互作用局限于其中的箱的体积. 使用箱约定时,(6.16) 中的 Dirac δ 函数要换成 Kronecker δ 函数

$$\delta_{\boldsymbol{k}_f,\boldsymbol{k}_i} = \begin{cases}1 & 若\ \boldsymbol{k}_f=\boldsymbol{k}_i\\ 0 & 若\ \boldsymbol{k}_f\neq\boldsymbol{k}_i\end{cases}$$

对于给定的一对态 (f, i)，其几率幅是 S 矩阵（或散射矩阵）的一个元素，由下式给出

$$S_{fi}=\lim_{t'\to\infty}\int\varphi_f^*(\boldsymbol{x}', t')\psi_i^{(+)}(\boldsymbol{x}', t')d^3x'$$

$$=\lim_{t'\to\infty}\int d^3x'\varphi_f^*(\boldsymbol{x}', t')\Big[\varphi_i(\boldsymbol{x}', t')$$

$$+\int d^4xG_0(\boldsymbol{x}', t'; \boldsymbol{x}, t)V(\boldsymbol{x}, t)\psi_i^{(+)}(\boldsymbol{x}, t)\Big]$$

$$=\delta^3(\boldsymbol{k}_f-\boldsymbol{k}_i)+\lim_{t'\to\infty}\int d^3x'd^4x\varphi_f^*(\boldsymbol{x}', t')$$

$$\times G_0(\boldsymbol{x}', t'; \boldsymbol{x}, t)V(\boldsymbol{x}, t)\psi_i^{(+)}(\boldsymbol{x}, t) \qquad (6.16)$$

其中 $\psi_i^{(+)}(\boldsymbol{x}, t)$ 是波动方程 (6.14) 的那个解，它当 $t\to-\infty$ 时简化为动量为 $\boldsymbol{k}_i$ 的平面波．在使用符号 $t\to\pm\infty$ 时，我们的意思是 $t\to$ 任何大的有限时间，其时粒子不在相互作用区域内(或者换句话说，其时 V 已撤去)；特别是，$t\to\pm\infty$ 可以指粒子被产生和被检测的时间．

迭代 (6.14)，我们可以把 $\psi^{(+)}$ 展开为多次散射级数，从而把 S 矩阵也表示成了多次散射级数，它的诸项和图 6.1 的诸图解相对应．

6.3 Green 函数的形式定义和性质

我们已经揭示了解散射问题的物理内含．现在我们来建立造出这些解的形式数学工具．我们的目标是研究定义 G 的微分方程，特别是把 G_0 明显地解出，以使我们已经勾划出来的 G 的展开得以明显地实现． 我们从对 $t'>t$ 有效的方程 (6.1) 出发，并把它重新写成对所有时间都有效的形式：

$$\theta(t'-t)\psi(x')=i\int d^3xG(x'; x)\psi(x) \qquad (6.17)$$

$\vartheta(t'-t)$ 是单位阶跃函数，定义为

$$\vartheta(t'-t)=\begin{cases}1 & t'>t\\ 0 & t'<t\end{cases} \tag{6.18}$$

并有下列非常有用的积分表示

$$\vartheta(\tau)=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{-1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega e^{-i\omega\tau}}{\omega+i\epsilon} \tag{6.19}$$

它是作为在 ω 复平面上的围道积分来计算的，如图 6.2 所示。对于 $\tau>0$，围道可沿实轴之下的无穷大半圆闭合以保证被积函数的指数衰减，而由 Cauchy 定理，积分值为 1. 对于 $\tau<0$，围道在实轴上面闭合，因为此时 $-i\epsilon$ 处的极点处于围道之外，故积分为零. 因为 $\vartheta(\tau)$ 在 $\tau=0$ 处取单位阶跃，它的导数是 δ 函数

$$\frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau}=\delta(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega e^{i\omega\tau} \tag{6.20}$$

现在我们试图从 (6.17) 找出 $G(x';x)$ 的方程和形式性质. 我们只知道 $\psi(x')$ 满足 Schrödinger 方程；这就引导我们将 $\left[i\frac{\partial}{\partial t'}-H(x')\right]$ 作用于 (6.17):

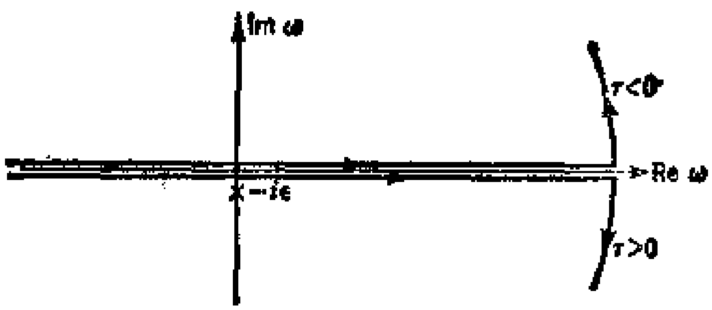


图 6.2 在 ω 复平面上单位阶跃函数 $\vartheta(\tau)$ 的积分围道

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t'}-H(x')\right]\vartheta(t'-t)\psi(x')=i\delta(t'-t)\psi(x')$$

$$=i\int d^3x\left[i\frac{\partial}{\partial t'}-H(x')\right]G(x';x)\psi(x) \qquad (6.21)$$

因为 (6.21) 对所有的解 ψ 都有效，我们能够从中提出 Schrödinger 理论的 Green 函数方程

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t'}-H(x')\right]G(x';x)=\delta^3(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})\delta(t'-t)$$

$$=\delta^4(x'-x) \qquad (6.22)$$

连同在时间上正向传播的边界条件，即

$$G(x';x)=0 \text{ 当 } t'<t \qquad (6.23)$$

方程 (6.22) 定义了适合于 (6.17) 的推迟 Green 函数或传播子.

当 $H_0(x')=-\frac{1}{2m}\nabla^2_{x'}$ 时，我们能够明显解出自由粒子的传播子. 在这个情况下，$G_0(x';x)$ 只能依赖于坐标 $(\boldsymbol{x}', t')$ 和 $(\boldsymbol{x}, t)$ 之差. 这是因为：在时刻 t 从 $\boldsymbol{x}$ 处的单位源发出而到达 $(\boldsymbol{x}', t')$ 的波仅依赖于间隔 $(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}, t'-t)$，而且 $G_0(x';x)$ 就准确地是这个波的振幅. 我们考虑其 Fourier 变换

$$G_0(x';x)=G_0(x'-x)$$

$$=\int\frac{d^3p\,d\omega}{(2\pi)^4}e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})-i\omega(t'-t)}G_0(\boldsymbol{p},\omega) \qquad (6.24)$$

用 $G_0(\boldsymbol{p},\omega)$ 表示，(6.22) 是

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t'}+\frac{1}{2m}\nabla^{2'}\right)G_0(x';x)$$

$$=\int\frac{d^3p\,d\omega}{(2\pi)^4}\left(\omega-\frac{p^2}{2m}\right)G_0(p,\omega)e^{-i\omega(t'-t)+i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})}$$

$$= \int \frac{d^3p\,d\omega}{(2\pi)^4} e^{-i\omega(t'-t)+i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x})}$$

因此对于 $\omega \neq p^2/2m$

$$G_0(\mathbf{p}, \omega) = \frac{1}{\omega - p^2/2m} \tag{6.25}$$

为使表示式(6.25)完全，需要有一个处理分母中奇点的规则。这由推迟边界条件(6.23)确定。回忆对 ϑ 函数(6.19)的讨论，我们在分母中加上一个正的无穷小虚数部分，并首先实现(6.24)中对 ω 的积分。这时奇点处在实轴的下面，如图 6.3 所示，我们得到

$$G_0(x'-x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x})} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$\times \frac{e^{-i\omega(t'-t)}}{\omega - p^2/2m + i\varepsilon}$$

$$= -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)_3} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x}) - i\frac{p^2}{2m}(t'-t)} \vartheta(t'-t)$$

$$= -i\vartheta(t'-t) \int d^3p\, \varphi_p(\mathbf{x}', t') \varphi_p^*(\mathbf{x}, t) \tag{6.26}$$

其中最后的形式用了(6.15)的记号。它把 Green 函数表示为对相应微分方程的本征函数完全集的求和，这是——在平面波的特殊情况下— Green 函数的一个有用表示式的一个例

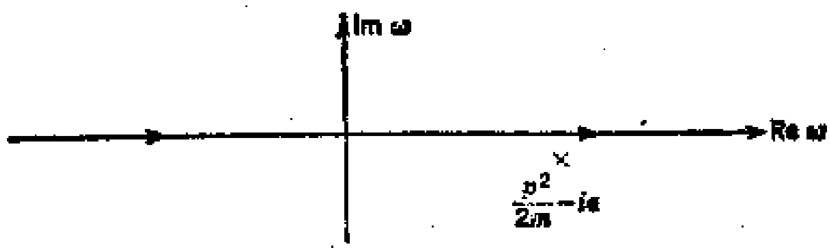


图 6.3 $G_0(p, \omega)$ 的奇点

子[1]. 普遍地说，如果我们能够构成 Schrödinger 方程的归一化解的完全集，它们满足如下形式的完备性陈述

$$\sum_n \psi_n(\mathbf{x}', t')\psi_n^*(\mathbf{x}, t) = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \qquad (6.27)$$

其中 $\sum_n$ 是对量子数 n 的谱的广义求和与积分，则容易验证

$$G(x'; x) = -i\vartheta(t' - t) \sum_n \psi_n(x')\psi_n^*(x) \quad (6.28)$$

满足 (6.22) 及所要求的边界条件． 对于 G_0 这个特殊情况 (6.26)，上述断言是通过联系 $\sum_n \to \int d^3p$ (对连续的动量谱积分)而确立的．

从 (6.26) 和 (6.28) 的形式可以得出，同样一个 Green 函数，它使 Schrödinger 方程的一个解沿时间正向传播，也就使这个解的复共轭沿时间逆向传播． 以 $\psi_m(x)$ 乘 (6.28)，对 $\mathbf{x}$ 的全范围积分，并借助本征函数的正交性和归一化，我们重又产生了 (6.17)

$$i\int d^3x G(x'; x)\psi_m(x) = \vartheta(t' - t) \sum_n \psi_n(x')$$

$$\times\int d^3x \psi_n^*(x)\psi_m(x) = \vartheta(t' - t)\psi_m(x')$$

重复这一运算，只是改为乘以 $\psi_m^*(x')$ 并对 x' 的全范围积分，我们得到前已指出的结果

1) (6.26) 中的自由粒子 Green 函数可以表为封闭形式

$G_0(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t) = -i\left(\frac{m}{2\pi i(t' - t)}\right)^{3/2}\left\{\exp\left[\frac{im|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^2}{2(t' - t)}\right]\right\}\vartheta(t' - t)$ 这使人想起布朗运动理论的一个表示式：一个在时刻 t 位于 $\mathbf{x}$ 的粒子，在随机扰动的影响下运动，将于时刻 t' 到达位置 $\mathbf{x}'$ 的几率表达式．的确，需要做的唯一改变是把 (t, t') 换为 $(-it, -it')$． 这同一改变把 Schrödinger 方程变换成扩散方程．

$$i\int d^3x'\phi_m^*(x')G(x';x)=\vartheta(t'-t)\phi_m^*(x) \qquad (6.29)$$

现在我们利用这些关系来构成 S 矩阵的各种有用的形式.

从(6.17)和定义方程(6.16)，我们可以通过精确的传播子将 S 矩阵元写成一个简结的形式

$$S_{fi}=i\lim_{t'\to\infty}\lim_{t\to-\infty}\int d^3x'd^3x\varphi_f^*(x')G(x';x)\varphi_i(x) \qquad (6.30)$$

因为一般地我们不能够直接解出精确的传播子，所以这还不是适用的形式. 由(6.28)已很明显，$G(x';x)$ 中包含着大量信息. Schrödinger 方程的全部解,其中包括完备性关系所要求的束缚态，都以相等的权重出现. 这就无怪 G 是难以计算的.

有如以前我们引出(6.11)的直观考虑一样，我们用从自由粒子的 Green 函数出发、构成一个迭代程序的办法着手进行.

利用 $H=H_0+V$，把(6.22)的各项重新组合,我们写下

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t'}-H_0(x')\right]G(x';x)=\delta^4(x'-x)+V(x')G(x';x)$$

$$=\int d^4x''\delta^4(x'-x'')[\delta^4(x''-x)+V(x'')G(x'';x)] \qquad (6.31)$$

这里我们已经把右边的相互作用项表为 δ 函数源的迭加. 积分(6.31)连同所要求的边界条件正好就是自由传播子的相应迭加:

$$G(x';x)=\int d^4x''G_0(x';x'')[\delta^4(x''-x)+V(x'')G(x'';x)]=G_0(x';x)+\int d^4x''G_0(x';x'')V(x'')G(x'';x) \qquad (6.32)$$

它与(6.12)一致. 将(6.32)代入(6.30)并对自由粒子应用(6.17)和(6.19),我们得出

$$S_{fi}=\int d^3x\varphi_f^*(x)\varphi_i(x)$$

$$+\lim_{t\to-\infty}\int d^4x_1d^3x\varphi_f^*(x_1)V(x_1)G(x_1;x)\varphi_i(x)$$

$$=\delta_{fi}-i\int d^4x_1\varphi_f^*(1)V(1)\varphi_i(1)$$

$$-i\int d^4x_1d^4x_2\varphi_f^*(1)V(1)G_0(1,2)V(2)\varphi_i(2)$$

$$-i\int d^4x_1d^4x_2d^4x_3\varphi_f^*(1)V(1)G_0(1,2)V(2)$$

$$\times G_0(2,3)V(3)\varphi_i(3)+\cdots \tag{6.33}$$

这个多次散射级数与从(6.16)发展而来的级数逐项一致. 和(6.16)一样,它最后也可以通过精确的 Schrödinger 方程的一个解而加起来. 为了做到这一点,我们在(6.33)的第一行中注意到,如果我们参考(6.17)并像过去一样撤去 V, 我们就能写出

$$\lim_{t\to-\infty}\int d^3xG(x'';x)\varphi_i(x)=\lim_{t\to-\infty}\int d^3xG(x'';x)\psi_i(x)$$

$$=-i\psi_i(x'')$$

方程(6.33)变为

$$S_{fi}=\delta_{fi}-i\int d^4x''\varphi_f^*(x'')V(x'')\psi_i^{(+)}(x'') \tag{6.34}$$

这里现在给 ψ 加了一个上标(+),以表明它是当 $t\to-\infty$ 时简化为自由波的一个解[见(6.14)]

$$\psi_i^{(+)}(x'')=\varphi_i(x'')+\int G_0(x'';x)V(x)\psi_i^{(+)}(x)d^4x$$

方程(6.34)附以展开(6.14)和(6.30)附以(6.32)是 S 矩阵的等价形式;二者都导致多次散射级数(6.33).

实际上，对于一个给定的相互作用，我们通常将只计算(6.33)中S矩阵的第一项或前两项非零贡献．这一计算程序是否有效取决于相互作用V是否微弱以及这个展为相互作用强度幂的级数是否迅速收敛．

由几率守恒得出的S矩阵的一个普遍性质是其么正性．我们记得：(在第一章的导论中)哈密顿量的厄米性意味着几率守恒，从而有两个解的内积与时间无关的结果．因此，我们可以写出

$$\int d^3x\psi_i^{(+)*}(x)\psi_j^{(+)}(x) = \lim_{t\to-\infty}\int d^3x\psi_i^{(+)*}(x)\psi_j^{(+)}(x)$$
$$= \lim_{t\to-\infty}\int d^3x\varphi_i^*(x)\varphi_j(x) = \delta_{ji} \qquad (6.35)$$

在平面波表示这个特例中

$$\delta_{ji} = \delta^3(\boldsymbol{k}_j - \boldsymbol{k}_i)$$

我们也可以把这个内积投影到遥远的未来，在那一情况下，由(6.16)和关于φ的完备性关系(6.27)，我们可以把解$\psi_i^{(+)}$用平面波态展开，而S矩阵元就是其展开系数：

$$\lim_{t'\to+\infty}\psi_i^{(+)}(x') = \sum_n \varphi_n(x')S_{ni} \qquad (6.36)$$

$\left(\text{对于平面波表示，} \sum_n = \int d^3p\right)$.

把(6.36)代入(6.35)的左边，我们求得

$$\sum_n S_{ni}S_{nj}^* = \delta_{ji} \qquad (6.37)$$

或者写成矩阵符号$S^+S=1$．如果$\psi_i^{(+)}$也和(6.36)中的φ_n一样构成完全集，则$S^+ = S^{-1}$，于是我们得出结论，n是么正矩阵[1]．

1）如果出现束缚态，(6.27)中的完备性求和必须将束缚态谱也包括在内．这并不改变么正性的证明．

6.4 正电子理论中的传播子

把我们的非相对论的传播子加以推广，并把它应用于相对论性电子理论. 非相对论的 $G(x';x)$ 是发源于 x 的粒子波传播到 x' 的几率幅，这一图象为我们提供了出发点. (6.11) 给出的这一振幅是若干个振幅之和，其中的第 n 项是与图 6.4 的图解相对应的一些因子的乘积. 图 6.4 中的每一根线代表发源于 x_{i-1} 的粒子波自由地传播到 x_i 的振幅 $G_0(x_i;x_{i-1})$. 在点 x_i (用 0 表示)，这个波以每单位空-时体积的几率幅 $V(x_i)$ 被散射为新波，新波再以振幅 $G_0(x_{i+1};x_i)$ 沿时间正向传播到下一次相互作用. 然后，在所有可能发生相互作用的空-时点上对这个振幅求和. 我们可以说，在第 i 个点(或顶点)的相互作用消灭了传播到 x_i 的粒子，并产生一个粒子在 $t_{i+1}\geqslant t_i$ 传播到 x_{i+1}.

在 Dirac 空穴理论中，我们希望保持的就是这幅图象.

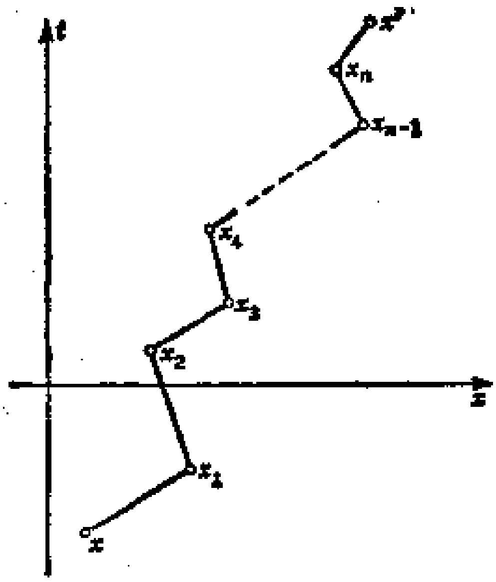


图 6.4 对 $G(x;x')$ 的 n 阶贡献

这幅图象很适合于相对论性理论，因为它强调了散射过程的总体的空-时观点，而同哈密顿形式之强调时间恰成对照。目的是通过与非相对论性理论的类比，来建立在 Dirac 空穴理论中计算散射过程的规则。但是，粒子偶的产生和湮灭过程的存在(这是我们必须也要加以描写的)使情况复杂化了。我们将采用来处理这一情况的基础规则不过是：用传播子做计算的指令必须与 Dirac 方程的动力学相一致，必须与第一章所讲的、并为我们在第五章中关于正电子的讨论所改进的普遍假设相一致。在本章及以后各章的发展中，我们将大量地依靠直观论证而牺牲严格性[1]。

让我们看一看必须用正电子理论来描述的典型过程的图象。这里不仅有如图 6.4 所阐明的类型的散射过程，而且有如图 6.5 所阐明的类型的粒子偶的产生和湮灭过程。图解 6.5*a* 表示：由作用于点 1 的势产生了电子—正电子偶；然后粒子偶的两个粒子分别传播到 x 和 x'。图解 6.5*b* 表示一个电子发源于 x 而终止于 x'。在其路径中，作用于 1 的势产生了粒子偶；此粒子偶中的正电子在 3 的场中湮灭掉始发电子；此粒子偶中的电子传播到点 2 并在该处被势所消灭。点 2 的势产生的电子传播到 x'。图解 6.5*c* 表示：在 1 产生粒子偶，传播到 3 并在那里为场所湮灭。

从这些图解中我们看到，我们不仅要像非相对性情况那样，需要有一个电子的，比如说，在 1 产生、由 1 传播到 2、在 2 被消灭的振幅；而且需要有一个正电子的产生、传播和消灭的振幅。如果找到这个正电子的振幅，我们就可以尝试把图 6.5 所阐明的每一类型过程同一个几率幅联系起来；并通过对

1) 在本书第二卷中给出的、量子场论的系统而繁琐的形式表述中，这些规则得到了证明。

过程可能有贡献的一切中间途径求和、或者积分，来构成任何特定过程的总振幅. 所以，对于一个散射事例，如图 6.4 和图 6.5 所示类型的途径都是存在的.

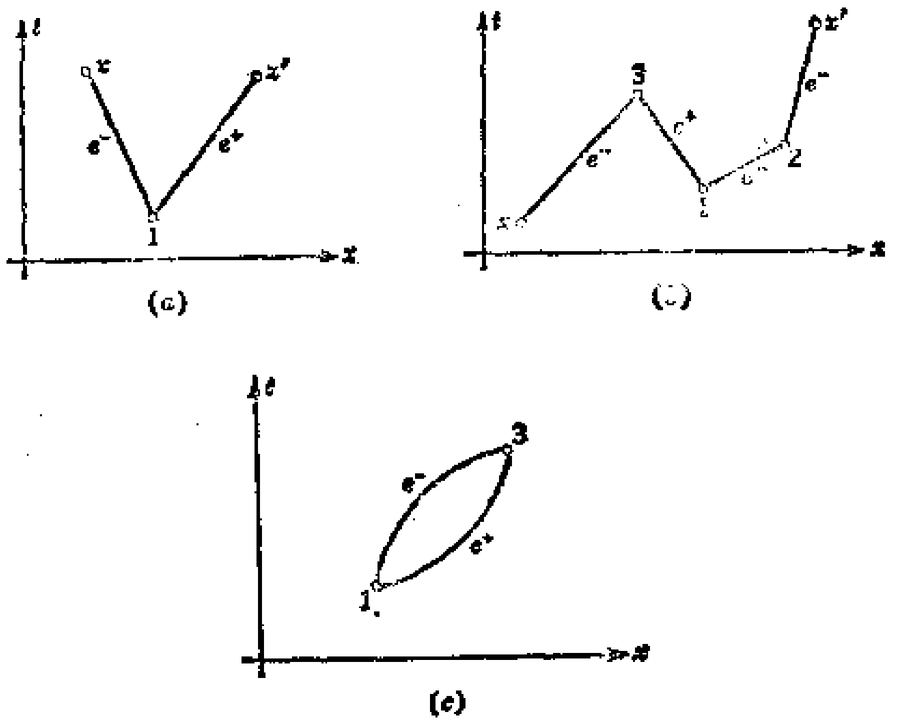


图 6.5 正电子理论中空—时图解的例子：(a) 粒子偶产生，(b) 散射，(c) 一个闭合迴线

我们必须按照上一章所表述的空穴理论来确定正电子振幅. 既然一个正电子的存在是与满充电子海中一个负能电子的空缺相联系，我们就可以把图 6.5 中一个正电子在 3 的消灭看作与一个负能电子在该处产生等价. 这就提出了：把一个正电子在 1 产生、在 3 消灭的振幅同一个负能电子在 3 产生、在 1 消灭的振幅联系起来的可能性. 图 6.5 的图解就要用正能量的电子沿时间正向传播、负能量的电子沿时间逆向传播来进行解释. 描写电子偶产生的图解 6.5a 可以看做是：一个负能电子发源于 x'，沿时间逆向传播到 1，在该处被消灭

并有一个正能电子沿时间正向传播到空一时点 x. 在一个散射过程中，传播到点 3 的电子有如下的选择：或是像图 6.4 那样，电子被势在空一时中沿正向散射，并以正能量继续传播；或者像图 6.5b 那样，被逆向散射到 1，且有负能量.

除了电子沿时间的正向和逆向以折线传播的路径之外，还存在着如图 6.5c 所阐明的闭合迴线的可能性. 在空穴理论中，我们说：在 1 的势把电子海中的一个电子散射到正能态，然后电子又在 3 被散射回电子海. 用传播子语言来说，电子产生于 1，在 3 被沿时间逆向散射而消灭于 1. 不能简单地把诸如此类的过程忽略掉. 理论形式需要它们，而且正如我们将要看到的，实验也证实了它们的存在.

作为我们方案的第一步，我们来构造一个 Green 函数以描写电子和正电子的传播. 第五章中正电子的讨论以及非相对论性理论中传播子的前述讨论将是我们的指南.

同非相对论性传播子的定义 (6.22) 类似，相对论性传播子，$S'_F(x';x)$，定义为满足一个 Green 函数方程：

$$\sum_{\lambda=1}^{4}\left[\gamma_\mu\left(i\frac{\partial}{\partial x'_\mu}-eA^\mu(x')\right)-m\right]_{\alpha\lambda}S'_{F_{\lambda\beta}}(x';x)$$
$$=\delta_{\alpha\beta}\delta^4(x'-x) \tag{6.38}$$

按照这里的定义，传播子是一个 4×4 矩阵，相应于 γ 矩阵的维数. 应用矩阵符号且省掉附标，(6.38) 变为

$$(i\nabla\!\!\!/' - eA\!\!\!/' - m)S'_F(x',x) = \delta^4(x'-x) \tag{6.39}$$

相对于 (6.22) 的另一个改变是：(6.38) 中的算符 $i\partial/\partial t' - H(x')$ 要乘以 γ^0 以形成协变的算符 $(i\nabla\!\!\!/' - eA\!\!\!/' - m)$.

通过 Fourier 变换到动量空间，我们能够计算自由粒子传播子

$$(i\nabla\!\!\!/' - m)S_F(x',x) = \delta^4(x'-x) \tag{6.40}$$

同非相对论情况 (6.24) 一样，$S'_F(x', x)$ 仅依赖于间隔 $(x'-$

x)，因此[1]

$$S_F(x', x) = S_F(x' - x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot(x'-x)} S_F(p) \quad (6.41)$$

代入 (6.40) 给出

$$\sum_{\lambda=1}^{4} (\not{p} - m)_{\alpha\lambda} S_{F_{\lambda\beta}}(p) = \delta_{\alpha\beta}$$

解出 Fourier 振幅 $S_F(p)$ 并重写成不带附标的矩阵，我们求得

$$S_F(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} = \frac{1}{\not{p} - m} \quad 当\ p^2 \neq m^2 \quad (6.42)$$

需要有如何处理 $p^2 = m^2$ 处、即 $p_0 = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} = \pm E$ 处的奇点的条文以使定义完整. 正如在非相对论性理论中那样，这个问题的答案来自积分 (6.41) 时加于 $S_F(x' - x)$ 的边界条件.

给于 Green 函数 $S_F(x' - x)$ 的解释是：它代表定域于点 x 的单位源在点 x' 产生的波. 这样一个定域化点源的 Fourier 分量包含着许多比电子 Compton 波长的倒数 m 要大的动量，并且我们预料，正电子可以和电子一样在 x 被源产生. 但是，空穴理论的一个必要的物理要求是：从 x 向未来传播的波只包含正能电子和正电子分量. 因为正能正电子和电子是用具有正频率时间行为的波函数来代表的[例如

$$\begin{aligned} \psi_c^{(+)}(x) &= C\bar{v}(p)^T e^{-ip\cdot x} \\ \psi^{(+)}(x) &= u(p) e^{-ip\cdot x} \end{aligned} \quad (6.43)$$

分别是(未归一化的)动量为 p^μ 的正电子和电子的波函数，且有 $p^0 > 0$]，故 $S_F(x' - x)$ 在未来 ($x_0' > x_0$) 只能包含正频率

1) 今后我们使用四维符号

$$p \cdot x = p_\mu x^\mu = p_0 t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$$

分量.

为了完成这一点，我们回到(6.41)和(6.42)中$S_F(x'-x)$的 Fourier 展开式，并如图 6.6 所示，沿着在p_0复平面上的围道求出对p_0的积分. 当$t'>t$，围道在下半平面闭合，并只包含$p_0=+\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}=E$处的正频率极点. 这就给出

$$S_F(x'-x)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})}\int_c\frac{dp_0}{2\pi}\frac{e^{-ip_0(t'-t)}}{p^2-m^2}(\not{p}+m)$$

$$=-i\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})}e^{-iE(t'-t)}\frac{E\gamma_0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m}{2E}$$

$$t'>t \qquad (6.44)$$

因此，在$(\boldsymbol{x}',t')$的波只包含正频率分量. 当$t'<t$，围道可在上边闭合，从而只包含$p_0=-\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}$处的极点. 这就给出

$$S_F(x'-x)=-i\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})}e^{+iE(t'-t)}$$

$$\times\frac{(-E\gamma_0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m)}{2E}\quad t'<t \qquad (6.45)$$

表明当$t'<t$，传播子由负频率波组成.

这些在非相对论性理论中不出现的负能波在这里是不可避免的. 在(6.44)中对围道C的任何其他选择都要导致向未来传播的负能波或向过去传播的正能波. 况且，这些向过去传播的负能波是我们所期望的，它们就是我们在上一节所讨论的正能正电子. 当我们把传播子公式应用于散射问题时，这一点将变得更为明显. 负能波的来源是$p_0=-\sqrt{p^2+m^2}$处的极点，它在非相对论性理论中是不出现的.

围道C的选取概括为在(6.42)的分母中加上一个小的正虚数部份，或径直取$m^2\to m^2-i\epsilon$，这里应理解为取极限$\epsilon\to 0^+$:

$$S_F(x'-x)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip\cdot(x'-x)}}{p^2-m^2+i\varepsilon}(\not p+m)\quad(6.46)$$

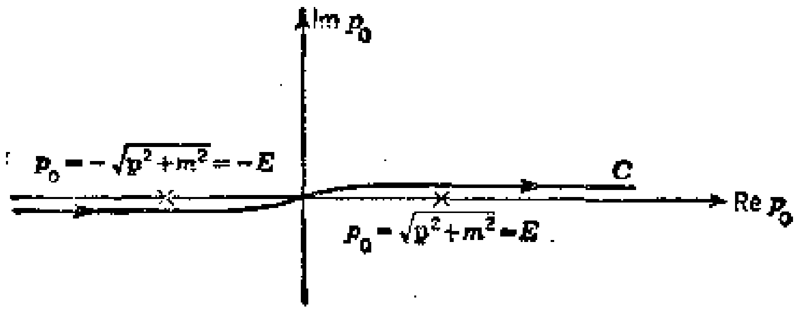


图6.6 $S_F(p)$ 的一个积分围道的奇异性

通过引入投影算符 (3.18) 和在负频率部分把 $\mathbf{p}$ 改为 $-\mathbf{p}$，就可将 (6.44) 和 (6.45) 形式结合为一体：

$$S_F(x'-x)=-i\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(\frac{m}{E}\right)[\Lambda_+(p)e^{-ip\cdot(x'-x)}$$

$$\times\,\vartheta(t'-t)+\Lambda_-(p)e^{ip\cdot(x'-x)}\vartheta(t-t')]\quad(6.47)$$

其中 $p_0=E>0$。等价地，将归一化平面波解写成

$$\psi_p^r(x)=\sqrt{\frac{m}{E}}(2\pi)^{-3/2}w^r(\mathbf{p})e^{-i\varepsilon_r p\cdot x}$$

我们求得

$$S_F(x'-x)=-i\vartheta(t'-t)\int d^3p\sum_{r=1}^{2}\psi_p^r(x')\bar\psi_p^r(x)$$

$$+\,i\vartheta(t-t')\int d^3p\sum_{r=3}^{4}\psi_p^r(x')\bar\psi_p^r(x)\quad(6.48)$$

并借助于 (3.11) 而验明：$S_F(x'-x)$ 作用于正能解 $\psi^{(+)}$ 使之沿时间正向传播，而作用于负能 $\psi^{(-)}$ 使之沿时间逆向传播：

$$\vartheta(t'-t)\psi^{(+)}(x')=i\int S_F(x'-x)\gamma_0\psi^{(+)}(x)d^3x\quad(6.49)$$

$$\theta(t-t')\phi^{(-)}(x') = -i\int S_F(x'-x)\gamma_0\phi^{(-)}(x)d^3x \quad (6.50)$$

这里定义的 $S_F(x'-x)$ 称为 Feynman 传播子，它于 1942 年首先为 Stückelberg 引进到正电子理论中，1948 年 Feynman 又独立地把它引入，并把它广泛地应用于物理计算.

我们可以从自由传播子 $S_F(x'-x)$ 形式地构成完全的 Green 函数和 S 矩阵元，也就是，当存在力场时电子和正电子的各种散射过程的振幅. 为了完成这一点，我们套用非相对论性的处理.

精确的 Feynman 传播子 $S'_F(x';x)$ 满足 (6.39)，而且类似于(6.31)和(6.32)，可以表为自由 Feynman 传播子的迭加；即

$$(i\nabla_{x'}-m)S'_F(x';x) = \int d^4y\delta^4(x'-y)[\delta^4(y-x) + eA(y)S'_F(y;x)]$$

将它积分得

$$S'_F(x',x) = S_F(x'-x) + e\int d^4yS_F(x'-y)A(y)S'_F(y,x) \quad (6.51)$$

类似于 (6.14)，Dirac 方程

$$(i\nabla_x - m)\Psi(x) = eA(x)\Psi(x) \quad (6.52)$$

的满足 Feynman 边条件的精确解是

$$\Psi(x) = \phi(x) + e\int d^4yS_F(x-y)A(y)\Psi(y) \quad (6.53)$$

依照 (6.48)，在 (6.53) 中的散射波到未来只包含正频率、而到过去只包含负频率：

$$\Psi(x) - \phi(x) \to \int d^3p\sum_{r=1}^{2}\phi_p^r(x)$$

$$\times\left[-ie\int d^4y\bar{\Phi}_p^r(y)A\!\!\!/(y)\Psi(y)\right]$$

$$\text{当 } t\to+\infty \tag{6.54}$$

$$\Psi(x)-\psi(x)\to\int d^3p\sum_{r=3}^{4}\psi_p^r(x)$$

$$\times\left[+ie\int d^4y\bar{\Phi}_p^r(y)A\!\!\!/(y)\Psi(y)\right]$$

$$\text{当 } t\to-\infty \tag{6.55}$$

于是，在(6.54)中，我们有了散射问题的一个表述，这表述同空穴理论中电子在被外场 $A^\mu(y)$ 散射之后不能落入负能海；只能进入未满充的正能态这一要求是一致的．方程(6.55)表明，沿时间逆向散射到较早时刻的波具有负能量．

根据(6.54)和(6.55)，我们肯定 S 矩阵元就是自由波解 $\psi^r(x)$ 的系数，即

$$S_{fi}=\delta_{fi}-ie\varepsilon_f\int d^4y\bar{\Phi}_f(y)A\!\!\!/(y)\Psi_i(y) \tag{6.56}$$

按照加于解(6.53)的 Feynman 边界条件，这里的 $\psi_f(y)$ 是量子数为 f 的末态自由波，对于在未来的正频率解，$\varepsilon_f=1$，对于在过去的负频率解，$\varepsilon_f=-1$；$\Psi_i(y)$ 是入射波，在 $y_0\to-\infty$ 时，它简化成一个量子数为 i 的正频率入射波，或者在 $y_0\to+\infty$ 时简化成一个向过去传播的负频率入射波．

方程(6.56)和(6.53)包含着图 6.5 所示的粒子偶产生和湮灭的振幅的计算法则，也包含着图6.4所示的“普通”散射过程的振幅的计算法则．

首先考虑普通电子散射过程，对于这一过程，$\Psi_i(y)$ 在 $y_0\to-\infty$ 时简化成一个正能量入射平面波，而对(6.56)的 n 阶贡献是

$$-ie^n\iint d^4y_1\cdots d^4y_n\bar{\Phi}_f^{(+)}(y_n)A\!\!\!/(y_n)S_F(y_n-y_{n-1})A\!\!\!/(y_{n-1})\cdots$$

$$\times S_F(y_2 - y_1) A(y_1) \psi_i^{(+)}(y_1) \tag{6.57}$$

级数(6.57)中包含了诸如图 6.4 及图 6.5b 这样的图

为了计算粒子偶的产生，我们把当 $t \to +\infty$ 时简化为负能量自由平面波的解代入到(6.56)中的 $\Psi_i(y)$. 具体地说，为要产生量子数分别为 (p_-, s_-) 和 (p_+, s_+) 的电子—正电子偶(其中 $p_{0\pm} > 0$)，我们把(6.56)中的 $\Psi_i(y)$ 以(6.53)的解代入，这个解当 $t \to +\infty$ 时简化为具有量子数 $(+p_+, +s_+, \epsilon = -1)$ 的负能量平面波；即是

$$\psi_i^{(-)}(y) = \sqrt{\frac{m}{E^+}} (2\pi)^{-3/2} v(p_+, s_+) e^{+ip_+ \cdot x}$$

我们取以 $(p_-, s_-, \epsilon = 1)$ 标记的一个正能解作为 Φ_f. 根据我们讨论的空穴理论的基础规则，我们正是把一个具有 4-动量 $-p_+$ 和自旋 $-s_+$ 的负能电子的空缺记录成一个 4-动量为 p_+、极化为 s_+ 的正电子的出现. 在传播子表述中，我们把正电子在 x 产生、由相互作用体积出发在时空中沿时间正向传播、并在 x' 进入给定的平面波态 (p_+, s_+) 的振幅同具有 4-动量 $-p_+$、自旋 $-s_+$ 的负能电子从 x' 逆向传播进入相互作用体积、并在 x 处消灭的振幅看作是等同的. 这样，通过跟踪一个负能电子沿时间逆向传播到相互作用区，在该处为场所散射、并以正能态出现而沿时间正向传播，我们就把一个跃迁振幅同粒子偶产生过程联系起来. 图 6.7 中表示了两个最低

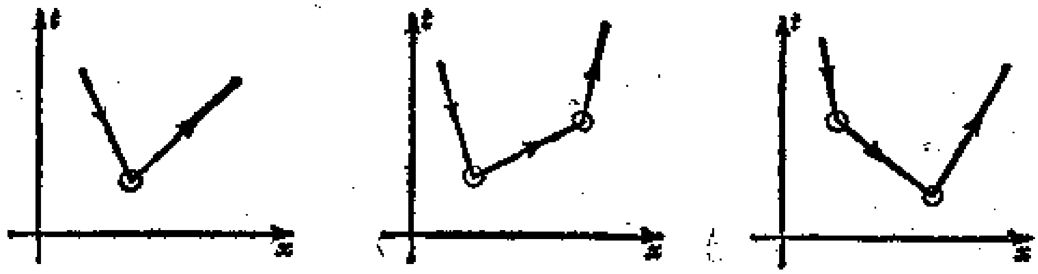


图6.7 一阶和二阶粒子偶产生的空-时 Feynman 图. 二阶散射按二次散射的时序作了进一步的分解

阶的 Feynman 图,而二阶散射按照两次散射的时序作了进一步的分解,如图所示.

方法类似，为了计算粒子偶湮灭的振幅，我们把方程(6.53)的、在 $y\to-\infty$ 时简化为 $\psi_i^{(+)}(y)$ 的一个解代入 $\Psi_i(y)$. 这个正能电子沿时间正向传播进入相互作用区域，而被沿时间逆向散射并以负能态出现. 电子散射到以量子数 $(p_+, s_+, \varepsilon=-1)$ 标记的给定"末"态 $\psi_f^{(-)}$ 的 n 阶振幅是

$$ie^n\int d^4y_1\cdots d^4y_n\bar{\psi}_f^{(-)}(y_n)\mathcal{A}(y_n)S_F(y_n-y_{n-1})\cdots \times\mathcal{A}(y_1)\psi_i^{(+)}(y_1) \tag{6.58}$$

在空穴理论语言中,这就是一个电子散射到动量为 $-p_+$、自旋为 $-s_+$ 的负能态的 n 阶振幅. 这个态在 $t=-\infty$ 时原来必须是空着的,也就是说,曾经有过一个4-动量为 p_+、自旋(或极化)为 s_+ 的空穴(或正电子)存在.

最后,为了描写正电子散射,在(6.56)和(6.58)中的"入射"正频率波要换成量子数为 $(p'_+, s'_+, \varepsilon=-1)$ 的一个负频率解. 它代表动量和自旋为 (p'_+, s'_+) 的出射正电子.

习　　题

1. 证明：在非相对论极限下，$S_F(x', x)$ 还原为 Schrödinger 方程的自由粒子推迟传播子.

2. 验证(6.48).

3. 验证(6.49)和(6.50),并推导对于伴随解 $\bar{\psi}^{(+)}$ 和 $\bar{\psi}^{(-)}$ 的类似关系.

4. 计算 $S_F(x)$。当 $x\to\infty$、$x\to 0$ 以及在光锥上时，$S_F(x)$ 的行为如何?

5. 设想在我们的体系中,用具有 Fermi 动量 k_F 的 Fermi 气体代替了真空. Feynman 传播子应如何修正. 计算在低密度极限下 S_F 的改变。

第七章 应 用

7.1 电子的 Coulomb 散射

在本章中，我们把适才发展的传播子形式应用于各种实际计算. 在我们得到了使用这些传播子振幅的经验之后，我们将以一种自然的、似乎是行得通的方式将其推广，以包括几个粒子之间的相互作用. 我们的方案和 Feynman 的原始论文一样[1]: 在采用量子场论的形式处理之前，先对物理上重要的一般过程建立计算跃迁速率和截面的法则.

我们将从一个电子被一个固定 Coulomb 势的 Rutherford 散射开始. 对如 (6.56) 所给出的、这一过程的跃迁矩阵元

$$s_{fi} = -ie\int d^4x\bar{\Psi}_f(x)\mathcal{A}(x)\Psi_i(x) \quad (f \neq i) \tag{7.1}$$

我们须翻译成普通的语言; 这里 $e<0$ 是电子电荷. 在最低阶，$\Psi_i(x)$ 简化为描写一个动量为 p_i、自旋为 s_i 的电子的入射平面波 $\psi_i(x)$:

$$\psi_i(x) = \sqrt{\frac{m}{E_iV}}u(p_i, s_i)e^{-ip_i\cdot x} \tag{7.2}$$

上式中，我们在体积为 V 的箱内把 $\psi(x)$ 归一化为单位几率. 用同样的方法

$$\bar{\psi}_f(x) = \sqrt{\frac{m}{E_fV}}\bar{u}(p_f,s_f)e^{ip_f\cdot x} \tag{7.3}$$

对于一个点电荷 $-Ze>0$，Coulomb 势由下式给出

$$A_0(x) = \frac{-Ze}{4\pi|\boldsymbol{x}|} \quad \boldsymbol{A}(x) = 0$$

---

1) R. P. Feynman, *Phys. Rev.*, 76, 749, 769, (1949).

因此

$$S_{fi}=\frac{iZe^2}{4\pi}\frac{1}{V}\sqrt{\frac{m^2}{E_fE_i}}\bar{u}(P_f,s_f)\gamma^0u(p_i,s_i)$$

$$\times\int\frac{d^4x}{|\boldsymbol{x}|}e^{i(P_f-P_i)\cdot x} \tag{7.4}$$

对时间坐标进行积分得到 $2\pi\delta(E_f-E_i)$，它表明了在静势中初态与末态之间的能量守恒．空间积分是 Coulomb 势的 Fourier 变换，如所周知

$$\int\frac{d^3x}{|\boldsymbol{x}|}e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}=\frac{4\pi}{|\boldsymbol{q}|^2}$$

其中 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}_f-\boldsymbol{p}_i$．我们的 S 矩阵元变为

$$S_{fi}=iZe^2\frac{1}{V}\sqrt{\frac{m^2}{E_fE_i}}\frac{\bar{u}(p_f,s_f)\gamma^0u(p_i,s_i)}{|\boldsymbol{q}|^2}2\pi\delta(E_f-E_i) \tag{7.5}$$

在动量间隔 d^3p_f 中末态的数目是 $V\,d^3P_f/(2\pi)^3$，因此每个粒子跃迁到这些态的跃迁几率是

$$|S_{fi}|^2\frac{Vd^3P_f}{(2\pi)^3}=\frac{Z^2(4\pi\alpha)^2m^2}{E_iV}\frac{|\bar{u}(p_f,s_f)\gamma_0u(P_i,s_i)|^2}{|\boldsymbol{q}|^4}$$

$$\times\frac{d^3P_f}{(2\pi)^3E_f}[2\pi\delta(E_f-E_i)]^2 \tag{7.6}$$

需要对 δ 函数的平方做一些说明．如果我们考虑在一个给定时间间隔 $(-T/2,T/2)$ 中的跃迁，能量 δ 函数将游散开来；即

$$2\pi\delta(E_f-E_i)\Longrightarrow\int_{-T/2}^{T/2}dt\,e^{i(E_f-E_i)t}$$

$$=2\frac{\sin(T/2)(E_f-E_i)}{E_f-E_i} \tag{7.7}$$

从 (7.7) 我们看到，对于大的然而有限的 T，

$$[2\pi\delta(E_f - E_i)]^2 \Longrightarrow 4\frac{\sin^2(T/2)(E_f - E_i)}{(E_f - E_i)^2}$$

把上式看做 E_f 的函数，这样一个曲线下的面积是 $2\pi T$，所以我们有等式

$$|2\pi\delta(E_f - E_i)|^2 = |2\pi\delta(0)|2\pi\delta(E_f - E_i)$$
$$= 2\pi T\delta(E_f - E_i) \tag{7.8}$$

或者简单地[1]

$$2\pi\delta(0) = T \tag{7.9}$$

看出这一点的一个有启发性的方法是：从定义

$$2\pi\delta(E_f - E_i) \underset{(T\to\infty)}{=} \int_{-T/2}^{T/2} dt\, e^{i(E_f - E_i)t}$$

得

$$2\pi\delta(0) \underset{(T\to\infty)}{=} \int_{T/2}^{T/2} dt = T$$

回到(7.6)并除以时间，我们求得单位时间中跃迁到动量间隔 d^3p_f 内的数目 R 是

$$R = \frac{4Z^2\alpha^2m^2}{E_iV}\frac{|\bar{u}(p_f, s_f)\gamma^0u(p_i, s_i)|^2}{|q|^4}\frac{d^3p_f}{E_f}\delta(E_f - E_i)$$

截面定义为跃迁速率 R 除以入射粒子通量 $J^a_{inc} = \bar{\phi}_i(x) \times \gamma^a\phi_i(x)$，其中 a 标记沿入射速度 $v_i = p_i/E_i$ 的矢量分量．按照 (7.2) 所采用的归一化，此通量是 $|J_{inc}| = |v_i|/V$。因此每单位立体角 $d\Omega$ 的微分截面是

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \int \frac{4Z^2\alpha^2m^2}{|v_i|E_i}\frac{|\bar{u}(p_f, s_f)\gamma^0u(p_i, s_i)|^2}{|q|^4}$$
$$\times \frac{p_f^2dp_f}{E_f}\delta(E_f - E_i) \tag{7.10}$$

1）如果我们构造波包以代表入射和出射粒子，就可以避免出现 δ 函数的平方这样的不确切的数学表示式．就可以在一个可靠的基础上建立恒等式(7.9)。参见 F. Low, *Brandeis Univ. Summer School*, 1959.

利用恒等式

$$p_f dp_f = E_f dE_f$$

我们最后得到

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4Z^2\alpha^2 m^2}{|\boldsymbol{q}|^4}|\bar{u}(p_f,s_f)\gamma^0 u(p_i,s_i)|^2 \qquad (7.11)$$

上式在非相对论极限下与 Rutherford 公式一致.

一般不观察末态粒子的极化，也不知道初态的极化. 如果入射束有净极化，这总是有其适当的理由的；而实验家终会将其发现，有如在 β 衰变中极化电子的情况一样. 在没有这种信息时，我们先验地给不同的初始极化态指定相等的几率. 这意味着实际观察到的截面将是(7.11)对末态自旋态的求和并对初态的平均，即

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} = \frac{4Z^2\alpha^2 m^2}{2|\boldsymbol{q}|^4}\sum_{\pm s_f, s_i}|\bar{u}(p_f,s_f)\gamma^0 u(p_i,s_i)|^2 \qquad (7.12)$$

可以将这一自旋求和重新写为下式

$$\sum_{\pm s_f, s_i}\bar{u}_\alpha(p_f, s_f)\gamma^0_{\alpha\beta}u_\beta(p_i, s_i)u^+_\lambda(p_i, s_i)\gamma^{0+}_{\lambda\delta}\gamma^{0+}_{\delta\sigma}u_\sigma(p_f, s_f)$$

$$= \sum_{\pm s_f, s_i}\bar{u}_\alpha(p_f, s_f)\gamma^0_{\alpha\beta}u_\beta(p_i, s_i)\bar{u}_\delta(p_i, s_i)\gamma^0_{\delta\sigma}u_\sigma(p_f, s_f)$$

照例，式中重复的指标意指着求和. 这是我们经常遇到的普遍形式的一个特殊情况：

$$|\bar{u}(f)\Gamma u(i)|^2 = [\bar{u}(f)\Gamma u(i)][\bar{u}(i)\bar{\Gamma} u(f)] \qquad (7.13)$$

其中 $\bar{\Gamma} = \gamma^0\Gamma^+\gamma^0$，特别是

$$\bar{\gamma}^\mu = \gamma^\mu$$

$$\overline{i\gamma^5} = i\gamma^5$$

$$\overline{\gamma^\mu\gamma^5} = \gamma^\mu\gamma^5$$

和
$$\overline{\not{a}\not{b}\not{c}\cdots\not{p}} = \not{p}\cdots\not{c}\not{b}\not{a}$$

如果我们应用(3.18)的能量投影算符，此时自旋求和就可以

简化为迹:

$$\sum_{\pm s_i} u_\beta(p_i, s_i)\bar{u}_\lambda(p_i, s_i) = \sum_{r=1}^{4} \varepsilon_r w^r_\beta(p_i)\bar{w}^r_\gamma(p_i)\left(\frac{\not p_i + m}{2m}\right)_{\gamma\lambda}$$

$$= \left(\frac{\not p_i + m}{2m}\right)_{\beta\lambda} = [\Lambda_+(p_i)]_{\beta\lambda}$$

(7.12) 中的自旋求和变为

$$\sum_{\alpha,\beta}\sum_{\pm s_f} \bar{u}_\alpha(p_f, s_f)\left(\gamma^0\frac{\not p_i + m}{2m}\gamma^0\right)_{\alpha\beta} u_\beta(p_f, s_f)$$

$$= \sum_{\alpha,\beta}\left(\gamma^0\frac{\not p_i + m}{2m}\gamma^0\right)_{\alpha\beta}\left(\frac{\not p_f + m}{2m}\right)_{\beta\alpha}$$

这里我们再次利用了同样的技巧. 这个最后的表示式是迹，就是矩阵

$$\gamma_0\frac{(\not p_i + m)}{2m}\gamma_0\frac{(\not p_f + m)}{2m}$$

的对角元素之和. 因此,可以把 (7.12) 写成

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} = \frac{4Z^2\alpha^2m^2}{2|\mathbf{q}|^4}\operatorname{Tr}\gamma_0\frac{(\not p_i + m)}{2m}\gamma^0\frac{(\not p_f + m)}{2m} \quad (7.14)$$

7.2 一些迹定理;自旋平均 Coulomb 截面

现在我们必须离开本题而去建立 Dirac 矩阵迹的有用性质. 这些性质将有助于我们计算截面，而无需老是去直接从 Dirac 矩阵算起. 这些性质是从 γ 矩阵的对易代数导出的,而且不论怎样选择 γ 矩阵的表象都是有效的. 我们把这些性质概括为一系列定理:

定理 1

奇数个 γ 矩阵的乘积之迹为零.

证明: 对于 n 为奇数

$$\operatorname{Tr}\not a_1\cdots\not a_n = \operatorname{Tr}\not a_1\cdots\not a_n\gamma_5\gamma_5 = \operatorname{Tr}\gamma_5\not a_1\cdots\not a_n\gamma_5$$

其中我们已经利用了迹的轮换性质，即 $\mathrm{Tr}AB=\mathrm{Tr}BA$。把第一个 γ_5 移到右边，由 $\gamma_\mu\gamma_5+\gamma_5\gamma_\mu=0$，我们提出 n 个负号并在 n 为奇数时得到

$$\mathrm{Tr}\not{a}_1\cdots\not{a}_n=(-1)^n\mathrm{Tr}\not{a}_1\cdots\not{a}_n\gamma_5\gamma_5=0 \tag{7.15}$$

定理 2

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}1=4\\&\mathrm{Tr}\not{a}\not{b}=\mathrm{Tr}\not{b}\not{a}=1/2\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}+\not{b}\not{a})=a\cdot b\mathrm{Tr}1\\&\qquad=4a\cdot b\end{aligned} \tag{7.16}$$

定理 3

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\not{a}_1\cdots\not{a}_n=&\,a_1\cdot a_2\mathrm{Tr}\not{a}_3\cdots\not{a}_n-a_1\cdot a_3\mathrm{Tr}\not{a}_2\not{a}_4\cdots\not{a}_n\\&+\cdots+a_1\cdot a_n\mathrm{Tr}\not{a}_2\cdots\not{a}_{n-1}\end{aligned} \tag{7.17}$$

特别是

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\not{a}_1\not{a}_2\not{a}_3\not{a}_4=&\,4[a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4+a_1\cdot a_4\cdot a_2\cdot a_3\\&-a_1\cdot a_3\cdot a_2\cdot a_4]\end{aligned}$$

证明：利用 $\not{a}_1\not{a}_2=-\not{a}_2\not{a}_1+2a_1\cdot a_2$，我们把 $\not{a}_1$ 移到 $\not{a}_2$ 的右边，即

$$\mathrm{Tr}\not{a}_1\not{a}_2\cdots\not{a}_n=2a_1\cdot a_2\mathrm{Tr}\not{a}_3\cdots\not{a}_n-\mathrm{Tr}\not{a}_2\not{a}_1\not{a}_3\cdots\not{a}_n$$

继续这个过程，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\not{a}_1\not{a}_2\cdots\not{a}_n=&\,2a_1\cdot a_2\mathrm{Tr}\not{a}_3\cdots\not{a}_n\\&-2a_1a_n\mathrm{Tr}\not{a}_2\cdots\not{a}_{n-1}-\mathrm{Tr}\not{a}_2\cdots\not{a}_n\not{a}_1\end{aligned}$$

最后，我们利用迹的轮换性质，使 $\not{a}_1$ 回到其他 γ 矩阵的左边；于是定理得证。

为了简化一个复杂的迹，最后这个定理是非常有用的；尽管在 $n>6$ 时，如果有可能利用某些微妙的方法以避免项数的大量增加，这个定理显得比较麻烦。

定理 4

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\gamma_5=0\\&\mathrm{Tr}\gamma_5\not{a}\not{b}=0\end{aligned} \tag{7.18}$$

$$\mathrm{Tr}\gamma_5 \not a \not b \not c \not d = 4i\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$$

式中 $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 当 $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ 是 $(0, 1, 2, 3)$ 的偶置换时为 $+1$，当是 $(0, 1, 2, 3)$ 的奇置换时为 -1，当有两个指标相同时为零.

证明：因为 $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$，前两个恒等式是直接的. 第三个恒等式可以通过考察其组成部分而得出. 要有非零的贡献，a，b，c，d 的所有分量必需是不同的分量，而总的贡献就是分量的各种组合乘以置换的符号之和. 为了固定总的符号，取

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\gamma_5\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 a^0b^1c^2d^3 &= i\epsilon_{0123}a^0b^1c^2d^3\mathrm{Tr}\gamma_5^2\\ &= 4i\epsilon_{0123}a^0b^1c^2d^3\end{aligned}$$

定理 5

$$\begin{aligned}\gamma_\mu\gamma^\mu &= 4\\ \gamma_\mu \not a\gamma^\mu &= -2\not a\\ \gamma_\mu \not a \not b\gamma^\mu &= 4a\cdot b\\ \gamma_\mu \not a \not b \not c\gamma^\mu &= -2\not c \not b \not a\\ \gamma_\mu \not a \not b \not c \not d\gamma^\mu &= 2[\not d \not a \not b \not c + \not c \not b \not a \not d]\end{aligned} \tag{7.19}$$

尽管严格说来这不是迹定理，它却经常和迹计算法联同使用，并且为了方便将它包括在这里. 其证明是一个简单的练习.

定理 6

$$\mathrm{Tr}\not a_1 \not a_2\cdots \not a_{2n} = \mathrm{Tr}\not a_{2n}\cdots \not a_1 \tag{7.20}$$

证明：从第五章关于电荷共轭的讨论我们想起：存在一个矩阵 C 使得 $C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T$，于是

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\not a_1\cdots \not a_{2n} &= \mathrm{Tr}C\not a_1C^{-1}C\not a_2C^{-1}\cdots C\not a_{2n}C^{-1}\\ &= (-)^{2n}\mathrm{Tr}\not a_1^T\not a_2^T\cdots \not a_{2n}^T\\ &= \mathrm{Tr}[\not a_{2n}\cdots \not a_1]^T = \mathrm{Tr}\not a_{2n}\cdots \not a_1\end{aligned}$$

回到我们的 Coulomb 散射问题. 并应用定理 1，(7.14) 变为

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega}=\frac{Z^2\alpha^2}{2|\boldsymbol{q}|^4}[\mathrm{Tr}\gamma^0\not{p}_i\gamma^0\not{p}_f+m^2\mathrm{Tr}(\gamma^0)^2]$$

利用定理 3 和定理 2，得到最后的答案

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega}=\frac{Z^2\alpha^2}{2|\boldsymbol{q}|^4}(8E_iE_f-4p_i\cdot p_f+4m^2) \tag{7.21}$$

微分截面可以用散射能 $E=E_i=E_f$ 和散射角 ϑ 来表示，利用运动学关系

$$p_i\cdot p_f=E^2-p^2\cos\vartheta=m^2+2\beta^2E^2\sin^2\frac{\vartheta}{2}$$

和 $$|\boldsymbol{q}|^2=4p^2\sin^2\frac{\vartheta}{2}$$

我们求得

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega}=\frac{Z^2\alpha^2}{4p^2\beta^2\sin^4(\vartheta/2)}\left(1-\beta^2\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right) \tag{7.22}$$

这是 Mott 截面[1]；当 $\beta\to0$ 时它简化为 Rutherford 公式.

7.3 正电子的 Coulomb 散射

下一步转到正电子在 Coulomb 场中的散射，我们注意到，直到 α 的最低阶，正电子散射的截面与电子散射的截面是一样的. 对于这一点，最为简单的是通过写下矩阵元而看出来. 根据 (6.56) 和继之而来的讨论，

$$S_{fi}=ie\int d^4x\bar{\Phi}_f(x)\not{A}(x)\Psi_i^{(-)}(x) \tag{7.23}$$

这里的入射态是在未来，应把它理解为一个具有 4-动量 $-p_f$、沿时间逆向运动的负能电子，如图 7.1 所画的. 用最低阶的平面波代入，波函数是

---

1) N. F. Mott, *Proc. Roy. Soc.* (*London*), **A124**, 425 (1929).

$$\psi_i(x) = \sqrt{\frac{m}{E_f V}}\, v(p_f, s_f) e^{+ip_f \cdot x} \qquad (7.24)$$

类似地，在 (7.23) 中的出态是沿时间逆向运动到过去的负能电子。它的波函数是

$$\psi_f(x) = \sqrt{\frac{m}{E_i V}}\, v(p_i, s_i) e^{+ip_i \cdot x} \qquad (7.25)$$

代表着在散射前具有动量 p_i 和极化 s_i 的入射正电子。同 (7.4) 类似，在 S 矩阵中引进 (7.24) 和 (7.25)，我们有

$$S_{fi} = -\frac{iZe^2}{4\pi}\frac{1}{V}\sqrt{\frac{m^2}{E_f E_i}}\,\bar{v}(p_i, s_i)\gamma^0 v(p_f, s_f) \times \int \frac{d^4x}{|\boldsymbol{x}|} e^{i(p_f - p_i)\cdot x}$$

由于电荷共轭不变性，我们同样可以把 (7.23) 写到 e 的这一阶

$$\begin{aligned} S_{fi} &= +ie\int d^4x \bar{\psi}_{ci}(x) A\!\!\!/ \psi_{cf}(x) \\ &= -ie\int d^4x \psi_i^T(x) C^{-1} A\!\!\!/ C \bar{\psi}_f^T(x) \\ &= +ie\int d^4x \bar{\psi}_f(x) A\!\!\!/ \psi_i(x) \end{aligned}$$

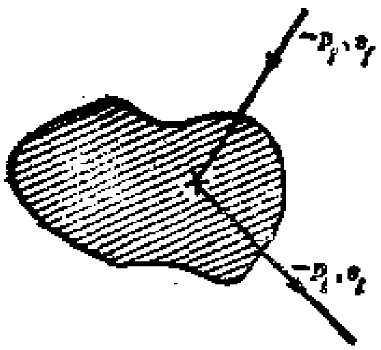


图 7.1 正电子的 Coulomb 散射

上式导致如前一样的结果. 在这个图象中，正电子沿时间正向运动，而 $\psi_{ef}(x) = c\gamma^0\psi_f^*(x)$ 就是初始正电子的波函数.

用与导出 (7.12) 相同的计算方法，我们求得微分截面

$$\left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega}\right)_{e^+} = \frac{2Z^2\alpha^2 m^2}{|\boldsymbol{q}|^4} \sum_{\pm s_f, s_i} |\bar{v}(p_i, s_i)\gamma^0 v(p_f, s_f)|^2 \quad (7.26)$$

利用对于正电子旋量的关系[见 (3.9)]，可以再次将自旋求和简化为迹

$$\sum_{\pm i} v_\alpha(p_i, s_i)\bar{v}_\beta(p_i, s_i) = -\left(\frac{-\not{p}_i + m}{2m}\right)_{\alpha\beta}$$

因此

$$\left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega}\right)_{e^+} = \frac{Z^2\alpha^2}{2|\boldsymbol{q}|^4} \mathrm{Tr}\,\gamma^0(\not{p}_i - m)\gamma^0(\not{p}_f - m)$$

若以 $-m$ 代替 m，上式便与 (7.14) 一样. 因为对于电子散射，我们的答案是 m 的偶函数，这就证实了在 α 的最低阶，正电子散射截面与电子散射截面相等. 我们可能从电荷共轭不变性较早地预想到这个结果. 在第五章中我们曾看到，对于在势 A_μ 中电子的每一个解，有一个在势 $-A_\mu$ 中正电子相应的解存在，也就是说，电子从势 $-e/4\pi r$ 的散射与正电子从势 $e/4\pi r$ 的散射是相同的；但是，因为算出的截面只依赖于 e^4，A_μ 的符号不起作用. 对于 e^6 修正项，这一点就不对了. 因

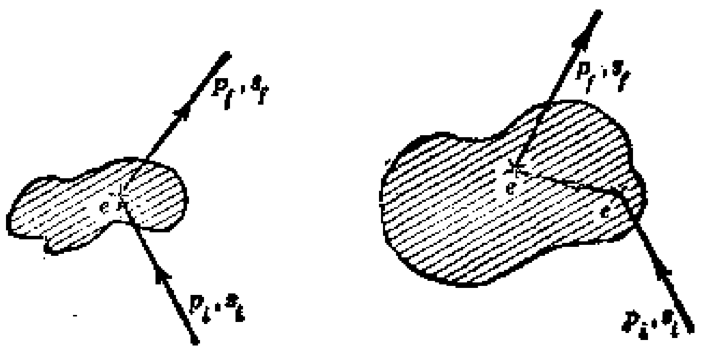


图 7.2 电子的 Coulomb 散射

为 e^6 修正项来自图 7.2 中一阶和二阶散射振幅的乘积，而它们对于电子和正电子符号是相反的.

我们还可以看到，正电子截面可以通过对电子截面做替换 $p_i \leftrightarrow -p_f$ 而得到；这是正电子理论的一个普遍特点，称作"替换规则"，它是与我们所发展的传播子图象紧密相联系的.往后，我们将看到这个规则的更多例子.

7.4 电子由 Dirac 质子散射

现在，设想我们考虑电子不是对一个固定的 Coulomb 场、而是对一个自由的、可动的质子的散射.（目前，我们把质子作为无结构的 Dirac 粒子来处理）. 我们的结果会怎样修改?

如果我们知道质子流 $J^\mu(x)$，我们就可以用 Maxwell 方程来计算它所产生的场. 如果我们遵循上例的讨论，则 S 矩阵(7.1)给出电子在这个场中的散射振幅，并导致跃迁几率和散射截面，到 α 的最低阶.

我们的第一步是找出质子所产生的电磁场. 此势是由下式算出的

$$\Box A^\mu(x) = J^\mu(x) \tag{7.27}$$

其中为了方便，我们选取了 Lorentz 规范来工作. 为了积分(7.27)以求出 $A^\mu(x)$，我们引进一个 Green 函数，或传播子，正如在电子的情况下一样. 传播子 $D_F(x-y)$ 是由下式定义的

$$\Box D_F(x-y) = \delta^4(x-y) \tag{7.28}$$

并且有 Fourier 表示

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iq\cdot(x-y)} D_F(q^2)$$

其中对于 $q^2 \neq 0$，$D_F(q^2) = -1/q^2$.

如同在费密子情形下一样，我们必须决定在 D_F 的极点

$q^2=0$ 处发生什么情况．和第六章中 Dirac 传播子的讨论相类似，我们给 q^2 加上一个无穷小的正虚数部分，这同在(6.46)中所做的、加上一个小的负虚数质量是等价的：

$$D_F(q^2)=\frac{-1}{q^2+i\varepsilon} \tag{7.29}$$

处理极点的这一规定，保证了只有正频率、或正能量的辐射沿时间正向传播．当我们考虑辐射被物质所散射（也许是光在通过气泡室时的折射）时，我们必须十分肯定，只发出正频率波一代表正能量光子一而不伴有负频率成份．于是，电磁辐射的 Feynman 传播子由下式给出

$$D_F(x-y)=\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}e^{-iq\cdot(x-y)}\left(\frac{-1}{q^2+i\varepsilon}\right) \tag{7.30}$$

而按照(7.27)，势的解是

$$A^\mu(x)=\int d^4y D_F(x-y)J^\mu(y) \tag{7.31}$$

把上式连同电子的平面波解一道引入 S 矩阵元(7.1)，给出

$$S_{fi}=-i\int d^4xd^4y[e\bar{\psi}_f(x)\gamma_\mu\psi_i(x)]D_F(x-y)J^\mu(y) \tag{7.32}$$

现在我们的问题是决定选择什么作为质子流 $J^\mu(y)$．由对应原理的启示，一个物理上有吸引力的选择是流的跃迁矩阵元

$$J^\mu(y)=e_p\bar{\psi}_f^p(y)\gamma^\mu\psi_i^p(y) \tag{7.33}$$

其中 $e_p=-e>0$ 是质子电荷，而 $\psi_i^p(y)$ 和 $\bar{\psi}_f^p(y)$ 代表自由质子的初态和末态平面波解．它们与(7.2)和(7.3)形式相同，区别仅在于：要做替换 P_i 和 P_f 以代表质子的初态和末态 4-动量，用 M 代表其质量．在这种选择下，流是

$$J^\mu(y)=-\sqrt{\frac{M^2}{E_fE_i}}\frac{e}{V}e^{i(P_f-P_i)\cdot y}\bar{u}(P_f,s_f)\gamma^\mu u(P_i,s_i) \tag{7.34}$$

方程 (7.31) 和 (7.33) 定义了通常所称的 Dirac 质子的 Møller 势[1]. 在非相对论近似下，这种以流的跃迁矩阵元作为 $A^\mu(x)$ 的源的选择曾被 Heisenberg 所采用，并在他用矩阵力学[2]处理原子辐射的计算中，用于电子的跃迁. 把 (7.34) 引进 (7.32) 并利用 (7.30)，我们不难计算积分，从而 S 矩阵元是

$$S_{fi}=\frac{-ie^2}{V^2}(2\pi)^4\delta^4(P_f-P_i+p_f-p_i)$$

$$\times\sqrt{\frac{m^2}{E_fE_i}}\sqrt{\frac{M^2}{\boldsymbol{E}_f\boldsymbol{E}_i}}\left[\bar{u}(p_f,s_f)\gamma_\mu u(p_i,s_i)\right]$$

$$\times\frac{1}{(p_f-p_i)^2+i\epsilon}\left[\bar{u}(P_f,s_f)\gamma^\mu u(P_i,s_i)\right]\quad(7.35)$$

这个结果对电子和质子变量上的对称形式支持了我们对选择 (7.33) 的信心. 如果计算一开始，我们就用 (7.1) 代表质子对电子流产生的场的散射振幅，而对电子流则应用猜想 (7.33)，我们应当达到同样的结果.

和 (7.5) 相比表明，电子对 Coulomb 场的散射与电子对质子的散射之间的区别，包括在如下的替换之中，即把因子 $Z\gamma^0/|\boldsymbol{q}|^2$ 替换为

$$\gamma_\mu\left(\frac{-1}{q^2+i\epsilon}\right)\sqrt{\frac{M^2}{\boldsymbol{E}_f\boldsymbol{E}_i}}\,\bar{u}(P_f,s_f)\gamma^\mu u(P_i,s_i)$$

而 V 替换为

$$(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{P}_f-\boldsymbol{P}_i+\boldsymbol{p}_f-\boldsymbol{p}_i)$$

---

1) C. Møller, *Ann. Phys.*, **14**, 531 (1932).

2) 例如参见: W. Pauli 载于 *S. Flügge (ed.), Handbuch der Physik*, Vol. V, *Part* 1, *Springer-Verlag*, *Berlin* 1958; *L. I.* Schiff, "*Quantum Mechanics*", *2d ed. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York*, 1955.

上式表达了动量守恒。

方程(7.35)给出了到 α 的最低阶的电子-质子散射振幅；其中，高阶的相互作用效应使得代入到流中的平面波畸变，已

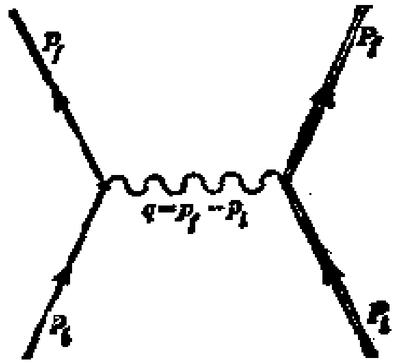


图 7.3 电子—质子散射

经被忽略掉了. 我们可以用 Feynman 图(图 7.3)来很方便地代表这一表达式. 用一根带箭头的、指向正向时间的实线来代表电子，而用一双线代表质子. 波线代表电磁相互作用的影响，它在矩阵元中是用动量转移的平方的倒数，或动量空间中达兰贝尔算符(7.27)的倒数来表示的. 我们用这条波线来代表在电子与质子之间交换 4-动量 $q = p_f - p_i = P_i - P_f$ 的"虚光子". 虚光子在两个流之间传播的振幅是 $-(q^2 + i\varepsilon)^{-1}$. 在光子衔接的点—或叫顶点—上，要乘以因子 $e\gamma^\mu$，它夹在代表入射和出射的自由真实粒子的两个旋量 $\sqrt{m/E} \times u(p, s)$之间. 对于图形的每根线和每个交点，都对应着 S 矩阵中一个唯一的因子. 此外，S_{fi} 总是包含着一个 4 维 δ 函数，它表达总体上的能量-动量守恒.

回到图 7.3 和方程(7.35)来计算一个截面，首先，我们把 $|S_{fi}|^2$ 除以观察时间间隔 T 和相互作用区域的空间体积 V，以构成单位体积的跃迁几率. 这就给出

$$
\left.\begin{aligned}
w_{fi} &= \frac{|S_{fi}|^2}{VT} = (2\pi)^4\delta^4(P_f + p_f - P_i - p_i) \\
&\qquad \times \frac{1}{V^4}\cdot\frac{m^2}{E_f E_i}\frac{M^2}{\boldsymbol{E}_f\boldsymbol{E}_i}|\mathfrak{M}_{fi}|^2 \\
&\text{其中} \\
\mathfrak{M}_{fi} &= [\bar{u}(p_f, s_f)\gamma_\mu u(p_i, s_i)]\frac{e^2}{q^2 + i\varepsilon} \\
&\quad \times [\bar{u}(P_f, S_f)\gamma^\mu u(P_i, S_i)]
\end{aligned}\right\} \qquad (7.36)
$$

是一个 Lorentz 不变矩阵元，今后把它称作不变振幅。在从(7.35)构成 w_{fi} 时，我们已经把下文给出的[见(7.6)] δ 函数的平方的处理加以推广，以把空间和时间间隔都包括进去：

$$
\begin{aligned}
&[(2\pi)^4\delta^4(P_f + p_f - P_i - p_i)]^2 \\
&\quad = (2\pi)^4\delta^4(0)(2\pi)^4\delta^4(P_f + p_f - P_i - p_i) \\
&\quad\quad \to VT(2\pi)^4\delta^4(P_f + p_f - P_i - p_i)
\end{aligned} \qquad (7.37)
$$

其次，我们把单位体积的跃迁几率除以入射粒子流密度 $|J_{入射}|$ 和单位体积内的靶粒子数，后者按照(7.2)所用的归一化恰好是 $1/V$。最后，为了得到一个物理截面，我们必须对与观察此过程的实验室条件相应的、电子和质子的给定的一组末态求和。自旋给定时，在动量间隔 $d^3p_f d^3P_f$ 中的末态数目是

$$
V\frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}V\frac{d^3P_f}{(2\pi)^3} \qquad (7.38)
$$

所以，跃迁到间隔 τ 内的末态的截面是

$$
\begin{aligned}
d\sigma &= \int_\tau V^2\frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}\cdot\frac{d^3P_f}{(2\pi)^3}\frac{V}{|J_{入射}|}w_{fi} \\
&= \int_\tau \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}\frac{d^3P_f}{(2\pi)^3}\frac{mM}{E_f\boldsymbol{E}_f}\frac{mM}{E_i\boldsymbol{E}_i} \\
&\qquad \times \frac{(2\pi)^4\delta^4(P_f + p_f - P_i - p_i)}{|J_{入射}|V}|\mathfrak{M}_{fi}|^2
\end{aligned} \qquad (7.39)
$$

对于非极化截面，我们可以进一步把上式对末态粒子的自旋态求和，对初态粒子的自旋求平均。

在这个阶段，我们可以确定对所有散射过程中是共同的某些特征。物理存在于不变振幅的平方 $|\mathfrak{M}_{fi}|^2$ 之中。对于每一根 Fermi 子外线，即对于每一个向相互作用区入射或出射的 Dirac 粒子，有一个因子 m/E。每一个末态粒子各有一相空间因子 $d^3p_f/(2\pi)^3$。于是我们看到，每一个末态粒子就引起一个因子 $(m/E)[d^3p_f/(2\pi)^3]$。这因子构成动量空间中一个 Lorentz 不变体积元，正如我们从下面的恒等式所看到的

$$\frac{d^3p}{2E}=\int_0^\infty dp_0\delta(p_\mu p^\mu-m^2)d^3p$$

$$=\int_{-\infty}^\infty d^4p\delta(p_\mu p^\mu-m^2)\vartheta(p_0) \tag{7.40}$$

$$\vartheta(p_0)=\begin{cases}1 & \text{当 } p_0>0\\ 0 & \text{当 } p_0<0\end{cases}$$

$\vartheta(p_0)$ 是 (6.18) 引进的阶跃函数，从而，只要 p^μ 是类时的(这里正是这种情况)，$d^3p/2E$ 便是 Lorentz 不变的。在相互作用中总体上的能量-动量守恒来自因子 $(2\pi)^4\delta^4(P_f+p_f-P_i-p_i)$。最后，还出现一个因子 $1/V|J_{\rm inc}|$，$|J_{\rm inc}|$ 是流密度，对共线束来说是单位时间中通过单位面积的粒子数，即

$$|J_{\rm inc}|=\frac{|\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{V}_i|}{V}$$

当 $V|J_{\rm inc}|$ 与两个入射粒子的归一化因子结合在一起时，就构成一个 Lorentz 不变表示式

$$\frac{mM}{E_iE_i|\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{V}_i|}=\frac{mM}{|\boldsymbol{p}_i|E_i+|\boldsymbol{P}_i|E_i}$$

$$=\frac{mM}{\sqrt{(p_i\cdot P_i)^2-m^2M^2}} \tag{7.41}$$

这表明，总截面在沿入射束方向上的 Lorentz 变换之下是不变的。现在，可以将方程 (7.39) 写成不变形式

$$d\sigma=\int_{f}\frac{mM}{\sqrt{(p_i\cdot P_i)^2-m^2M^2}}|\mathfrak{M}_{fi}|^2(2\pi)^4\delta^4(P_f-P_i$$

$$+p_f-p_i)\frac{m\,d^3p_f}{(2\pi)^3E_f}\frac{M\,d^3P_f}{(2\pi)^3\boldsymbol{E}_f}\qquad(7.42)$$

这些因子可以从许多途径推出；今后我们将略去它们如何出现的细节。现在，箱归一化体积 V 已从最后的结果中消失，确实，通过不含有 V 的其他归一化约定也可以得到同样结果。

在不含有共线束的情况下，直接考虑单位时间中的事例数 dN/dt 更为方便，由 (7.36) 求得它是

$$\frac{dN}{dt}=\int d^3x\rho_e(\boldsymbol{x},t)\rho_P(\boldsymbol{x},t)\int\frac{mM}{E_i\boldsymbol{E}_i}|\mathfrak{M}_{fi}|^2(2\pi)^4$$

$$\times\delta^4(P_f-P_i+p_f-p_i)\frac{m\,d^3p_f}{(2\pi)^3E_f}\cdot\frac{M\,d^3P_f}{(2\pi)^3\boldsymbol{E}_f}$$

$\rho_e(\boldsymbol{x},t)$ 和 $\rho_P(\boldsymbol{x},t)$ 分别是单位体积中的电子数和质子数，它们取代了两个因子 $(1/V)$，这两个因子把 (7.36) 归一化为体积 V 中有一个粒子。

照上面所写的，截面 (7.42) 是电子和质子从给定的初态自旋到给定的末态自旋的跃迁。如果不观察极化，我们必须对初态自旋求平均，对末态自旋求和。于是

$$|\overline{\mathfrak{M}}_{fi}|^2=\frac{1}{4}\sum_{s_f,S_f,s_i,S_i}|\bar{u}(p_f,s_f)\gamma^\mu u(p_i,s_i)$$

$$\times\frac{e^2}{q^2+i\varepsilon}\bar{u}(P_f,S_f)\gamma_\mu u(P_i,S_i)|^2$$

$$=\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\,\frac{(\not p_f+m)}{2m}\gamma^\mu\frac{(\not p_i+m)}{2m}\gamma^\nu$$

$$\times \mathrm{Tr}\frac{(\not P_f + M)}{2M}\gamma_\mu\frac{(\not P_i + M)}{2M}\gamma_\nu\frac{e^4}{(q^2)^2}$$

利用 7.2 节的迹定理计算第一个迹，得出

$$\mathrm{Tr}\frac{(\not p_f + m)}{2m}\gamma^\mu\frac{(\not p_i + m)}{2m}\gamma^\nu$$

$$= \frac{1}{4m^2}\mathrm{Tr}(\not p_f\gamma^\mu\not p_i\gamma^\nu + m^2\gamma^\mu\gamma^\nu)$$

$$= \frac{1}{m^2}[p_f^\mu p_i^\nu + p_i^\mu p_f^\nu - g^{\mu\nu}(p_f\cdot p_i - m^2)]$$

第二个迹形式相同，在经过一些代数运算后，最后的答案压缩为

$$|\overline{\mathfrak{M}}_{fi}|^2 = \frac{e^4}{2m^2M^2(q^2)^2}[(P_f\cdot p_f)(P_i\cdot p_i)$$
$$+ (P_f\cdot p_i)(P_i\cdot p_f) - m^2(P_f\cdot P_i) - M^2(p_f\cdot p_i)$$
$$+ 2M^2m^2] \tag{7.43}$$

对于非极化截面，我们把此公式代入 (7.42)。作为一个有用的结果，我们来计算在初态质子是静止的实验室参考系中的 $d\sigma$，并且我们令 $p_f = (E', \boldsymbol{p}')$，$p_i = (E, \boldsymbol{p})$ 和 $P_i = (M, \boldsymbol{0})$。计算电子在 ϑ 角附近的给定立体角 $d\Omega'$ 内出射的微分截面的相空间积分时，应用 (7.40) 是方便的。写下 $d^3p' = p'^2dp'd\Omega' = p'E'dE'd\Omega'$，我们有

$$\frac{d\bar\sigma}{d\Omega'} = \frac{2}{|\boldsymbol{p}|}\int\frac{m^2Mp'dE'}{(2\pi)^2}|\overline{\mathfrak{M}}_{fi}|^2d^4P_f\delta(P_f^2 - M^2)\vartheta(P_f^0)$$
$$\times\,\delta^4(P_f + p' - P_i - p)$$
$$= \frac{2}{|\boldsymbol{p}|}\frac{m^2M}{4\pi^2}\int p'dE'|\overline{\mathfrak{M}}_{fi}|^2\delta((p' - P_i - p)^2 - M^2)$$
$$\vartheta(P_i^0 + E - E')$$
$$= \frac{m^2M}{2\pi^2p}\int_M^{M+E}p'dE'|\overline{\mathfrak{M}}_{fi}|^2\delta(2m^2 - 2(E' - E)M$$

$$- 2E'E + 2pp'\cos\vartheta)$$

$$= \frac{m^2 M}{4\pi^2} \frac{p'}{p} \frac{|\overline{\mathfrak{M}}_{fi}|^2}{M + E - (pE'/p')\cos\vartheta} \tag{7.44}$$

式中来自 δ 函数的能量守恒的要求是

$$E'(M + E) - p'p\cos\vartheta = EM + m^2 \tag{7.45}$$

在得出最后形式时，我们利用了 $\int dx\delta(f(x)) = |df(x)/dx|^{-1}$。

对于能量 $E \ll$ 质子静能 M 的电子，我们忽略掉 $E/M \ll 1$ 而回到以前在静 Coulomb 场中散射的结果。在这一极限下，(7.44) 简化为 Mott 截面 (7.21)，因为在 $E' = E$ 时由 (7.45)

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega'} = \frac{m^2}{4\pi^2} |\overline{\mathfrak{M}}_{fi}|^2 \quad \frac{E}{M} \ll 1$$

由 (7.43)

$$|\overline{\mathfrak{M}}_{fi}|^2 = \frac{8\pi^2\alpha^2}{m^2 q^4}(2E^2 + m^2 - p_f \cdot p_i) \quad \frac{E}{M} \ll 1$$

当质子反冲变得重要时，电子可以作为极端相对论性的粒子来处理，而忽略掉正比于电子质量的修正项。由 (7.43) 和 (7.44) 很明显，没有 m/E 的线性(或奇次)项，所以修正项是属于 $(m/E)^2$ 阶的：

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega'} = \frac{m^2}{4\pi^2} \frac{E'/E}{1 + (2E/M)\sin^2(\vartheta/2)} |\overline{\mathfrak{M}}_{fi}|^2 \quad \frac{m}{E} \ll 1$$

在由 (7.43) 计算 $|\overline{\mathfrak{M}}_{fi}|^2$ 时，利用能量-动量守恒 $P_f = P_i + p_i - p_f$ 而把 P_f 用电子的反冲来重新表述是方便的。这样做就给出

$$|\overline{\mathfrak{M}}_{fi}|^2 = \frac{8\pi^2\alpha^2}{m^2 M^2 q^4}[2P_i \cdot p_f P_i \cdot p_i + p_i \cdot p_f(P_i \cdot p_i - P_i \cdot p_f - M^2)]$$

$$= \frac{8\pi^2\alpha^2 EE'}{m^2 16E^2E'^2\sin^4(\vartheta/2)}\left[2 + 2\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right.$$

$$\left.\times\left(-\frac{1}{2}\frac{q^2}{M^2} - 1\right)\right]$$

$$= \frac{\pi^2\alpha^2}{m^2 EE'\sin^4(\vartheta/2)}\left(\cos^2\vartheta/2 - \frac{q^2}{2M^2}\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$\frac{m}{E} \ll 1$$

其中我们记住 $q^2 = (p_f - p_i)^2 = -4EE'\sin^2(\vartheta/2)$. 于是微分截面是

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega'} = \frac{\alpha^2}{4E^2}\cdot\frac{\cos^2(\vartheta/2) - (q^2/2M^2)\sin^2(\vartheta/2)}{\sin^4(\vartheta/2)[1+(2E/M)\sin^2(\vartheta/2)]}$$

$$\frac{m}{E} \ll 1 \qquad (7.46)$$

式中在极限 $m^2 \to 0$ 时利用了 (7.45):

$$E'E(1 - \cos\vartheta) = M(E - E')$$

方程 (7.46) 是在质子的行为恰如一个质量为 M 的重电子这个假设下导出的. 但是,这个描述是不完全的,因为它没有计及质子的结构和反常磁矩,后者具有介子的起源. 质子的完全描述导致对 (7.46) 的修正,这一点在超过几百个 Mev 的大能量下是重要的. 在后面的讨论(见第十章)中我们将回到这一点.

7.5 电子-质子散射的高阶修正

到此为止,我们已经实现的对电子-质子散射的计算. 仅仅对于 e^2 的非零的最低阶是有效的. 为了得到 e 的更高一阶的修正, 我们必须回到 (6.57), 并考虑电子与质子之间的二阶相互作用振幅. 这由下式给出

$$S_{fi}^{(2)} = -ie^2\int d^4x d^4y \bar{\psi}_f(x) \not{A}(x) S_F(x-y) \not{A}(y) \psi_i(y) \quad (7.47)$$

其中电磁势仍然是由质子流产生的． 为了确定此流的形式。我们来考虑二阶电子流与 (7.47) 中的 $A_\mu(x)$ 和 $A_\nu(y)$ 相互作用的形式．如同在一阶计算 (7.35) 中一样，$S_{fi}^{(2)}$ 在这个二阶电子流

$$\begin{aligned} &i\bar{\psi}_f(x)\gamma_\mu S_F(x-y)\gamma_\nu\psi_i(y) \\ &= \bar{\psi}_f(x)\gamma_\mu\Big\{\sum_{n;p_0>0}\vartheta(x_0-y_0)\psi_n(x)\bar{\psi}_n(y) \\ &\quad - \sum_{n;p_0<0}\vartheta(y_0-x_0)\psi_n(x)\bar{\psi}_n(y)\Big\}\gamma_\nu\psi_i(y) \end{aligned}$$

和质子流之间在形式上应该是对称的．为了使流成为两个跃迁流的乘积的迭加，因子 i 是必要的． 这就启发了我们遵循 (7.31) 而写下

$$\begin{aligned} A_\mu(x)A_\nu(y) &= e_p^2\int d^4w d^4z D_F(x-w)D_F(y-z)\bar{\psi}_f^p(w)\gamma_\mu \\ &\times\Big\{\sum_{n;p_0>0}\vartheta(w_0-z_0)\psi_n^p(w)\bar{\psi}_n^p(z) \\ &- \sum_{n;p_0<0}\vartheta(z_0-w_0)\psi_n^p(w)\bar{\psi}_n^p(z)\Big\}\gamma_\nu\psi_i^p(z) \\ &= ie_p^2\int d^4w d^4z D_F(x-w)D_F(y-z)\bar{\psi}_f^p(w) \\ &\times\gamma_\mu S_F^p(w-z)\gamma_\nu\psi_i^p(z) \end{aligned} \quad (7.48)$$

因子 $D_F(x-w)D_F(y-z)$ 是图 7.4 中两根内部光子线的 Feynman 传播子．它们在用圆点表示的电子顶点和质子顶点之间传播，这些顶点分别贡献 $e\gamma_\lambda$ 和 $e_p\gamma_\sigma$． 内部电子线和内部质子线具有 Fermi 传播子 $S_F(x-y)$ 和 $S_F^p(w-z)$．这些因子是 Feynman 图与写在坐标空间中的 S 矩阵元之间的对应的一个例子． 为了使 $S_{fi}^{(2)}$ 的表达式完备，还必须在质子流

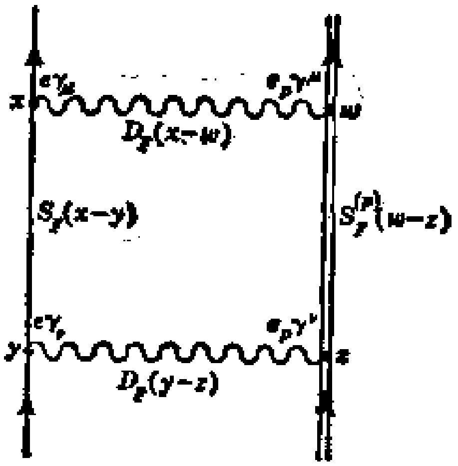


图 7.4　对电子-质子散射的四阶贡献

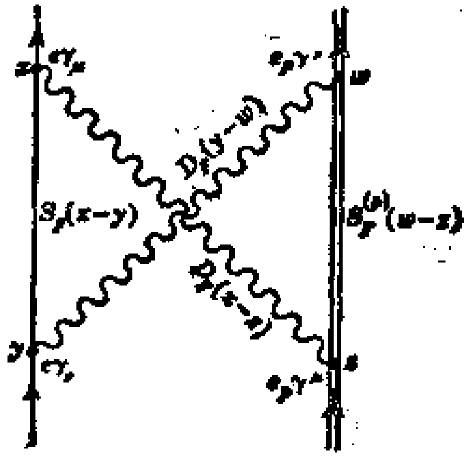


图 7.5　对电子-质子散射的四阶贡献

中加上另外一个表示两个光子的不可分辨性的项。电子并不知道在 x 引起相互作用的光子是发源于 w 还是发源于 z，因而图 7.5 所说明的可能性必须和相应于图 7.4 的可能性一起包括在内。光子的 Feynman 传播子保证了只有正频率波沿时间正向传播。但是四个点 x，y，w 和 z 的所有相对时序在相互作用中都存在，因而在 w 的光子同样地可以是被电子发射或者吸收的第一个光子，也可以是第二个光子。为了把两个不可分辨地交换了的光子的变量对称化，我们给 (7.48) 加上一项

$$
ie_p^2\int d^4w d^4z D_F(x-z)D_F(y-w)\bar{\Phi}_f^p(w)\gamma_\nu \times S_F^p(w-z)\gamma_\mu\psi_i^p(z)
$$

这就给出在 (7.47) 中的

$$
\begin{aligned}
S_{fi}^{(2)} = e^2e_p^2\int & d^4xd^4yd^4zd^4w\bar{\Phi}_f(x)\gamma_\mu S_F(x-y)\gamma_\nu\psi_i(y) \\
& \times\{D_F(x-w)D_F(y-z)\bar{\Phi}_f^p(w)\gamma^\mu S_F^p(w-z) \\
& \times\gamma^\nu\psi_i^p(z)+D_F(x-z)D_F(y-w)\bar{\Phi}_f^p(w) \\
& \times\gamma^\nu S_F^p(w-z)\gamma^\mu\psi_i^p(z)\}
\end{aligned}
\tag{7.49}
$$

(7.49) 的两项都符合同样的规则，以便在坐标空间中根据相应的 Feynman 图写出 S 矩阵元.

注意到目前为止，我们的规则在关于因子[1] i 上还有一些不明确. 我们把一个总体因子 $(-i)$ 与 S 矩阵联系起来，然后，把因子 iS_F^p 与质子传播子联系起来. 在更高阶，出于和我们现在的例子相同的理由，所有的质子传播子都将伴有一个因子 i. 如果我们对于每根电子线也写出 iS_F，并把每一个 $\not{A}$ 与一个因子 $-i$ 联系起来，也就是说

$$-ie\not{A}S_Fe\not{A}S_F\cdots e\not{A}=(-ie\not{A})iS_F(-ie\not{A})\cdots(-ie\not{A})$$

我们就可以使关于 Fermi 传播子的规则一致起来. 总体因子 $(-i)$ 被吸收进 $\not{A}$ 的外加因子之中. 因此，对于在电子线中的每一个 γ_μ，我们都联系上一个因子 $-i$. 我们还可以把 $-i$ 与每一个质子顶点 γ_μ 联系起来，如果我们在每个光子传播子 D_F 之前写上 i 以做为抵偿的话. 于是，我们得到关于因子 i 的统一的规则: 在图中对于每个顶点是 $-i$，对于每根线是 i. 今后我们将采用这个规则.

为了实际的计算，转换到动量空间是有用的，因此，我们把 (7.49) 中见到的每样东西都作 Fourier 变换. 如在 (7.2)、(7.3) 和 (7.34) 中那样，外线粒子(即入射和末态的电子和质子)的波函数假定为平面波. 此时，举例来说，(7.49) 的第一项就变为

$$\frac{e^4}{V^2}\int d^4x\,d^4y\,d^4z\,d^4w\sqrt{\frac{m^2}{E_fE_i}}\sqrt{\frac{M^2}{E_fE_i}}\frac{d^4q_1\,d^4q_2\,d^4p\,d^4P}{(2\pi)^4(2\pi)^4(2\pi)^4(2\pi)^4}$$

$$\times\frac{e^{-iq_1(x-w)}}{q_1^2+i\epsilon}\frac{e^{-iq_2(y-z)}}{q^2+i\epsilon}\Big[e^{ip_f\cdot x}\bar{u}(p_f,s_f)\gamma_\mu$$

---

1) 在做完习题 (7.2) 后，关于总体系数 2 的可能的疑虑便能够消释.

$$\times \frac{e^{-ip\cdot(x-y)}}{\not p - m + i\epsilon}\gamma_\nu u(p_i, s_i)e^{-ip_i\cdot y}\Big]\Big[e^{iP_f\cdot w}\bar{u}(P_f, S_f)\gamma^\mu$$

$$\times \frac{e^{-iP\cdot(w-z)}}{\not P - M + i\epsilon}\gamma^\nu u(P_i, S_i)e^{-iP_i\cdot z}\Big]. \tag{7.50}$$

实现对所有坐标的积分．得到一个 $(2\pi)^4$ 乘一个 4 维 δ 函数的因子，这个 δ 函数表达了在与每一个坐标相联系的顶点上的能量-动量守恒．现在可以做动量积分；于是(7.50)简化为

$$\frac{e^4}{V^2}\sqrt{\frac{m^2}{E_f E_i}}\sqrt{\frac{M^2}{\mathbf{E}_f \mathbf{E}_i}}(2\pi)^4\delta^4(P_f + p_f - P_i - p_i)$$

$$\times \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4}\frac{1}{q_1^2 + i\epsilon}\frac{1}{(q - q_1)^2 + i\epsilon}$$

$$\times \Big[\bar{u}(p_f, s_f)\gamma_\mu \frac{1}{\not p_f + \not q_1 - m + i\epsilon}\gamma_\nu u(p_i, s_i)\Big]$$

$$\times \Big[\bar{u}(P_f, S_f)\gamma^\mu \frac{1}{\not P_f + \not q_1 - M + i\epsilon}\gamma^\nu u(P_i, S_i)\Big] \tag{7.51}$$

同以前一样，式中 $q = p_f - p_i$．注意出现了总体的能量-动量守恒 δ 函数，以及环绕(图 7.6 所示的)动量空间 Feynman 图中的闭合迴线，对 4 动量 q_1 的积分．除去与 δ^4 相联系的 $(2\pi)^4$ 因子和属于对 d^4q 积分的补偿的 $(2\pi)^{-4}$ 因子之外，我们已经有了对于因子 $(2\pi)^4$ 的系统消去法．(7.51) 中其他的因子，可以用与(图 7.3 中)最低阶计算相同的方法与 Feynman 图联系起来．每一个顶点贡献一个因子 $-ie\gamma_\mu$，每一个外线粒子贡献一个因子 $\sqrt{m/E}$．这里的新特征是因子 $i[\not p - m + i\epsilon]^{-1}$，在矩阵顺序上它夹在两个顶点之间，是从虚的中间 Fermi 子线的传播子来的．

借助于不多的经验，就有可能通过核验把诸如 (7.51) 的

形式与已知的 Feynman 图联系起来．在动量空间中图 7.7 的 Feynman 图与图 7.5 相对应，其振幅与 (7.51) 的区别仅在于：把 (7.51) 中的质子自旋因子替换为

$$\bar{u}(P_f, S_f)\gamma^\nu \frac{1}{P_i - q_1 - M + i\epsilon} \gamma^\mu u(P_i, S_i) \quad (7.52)$$

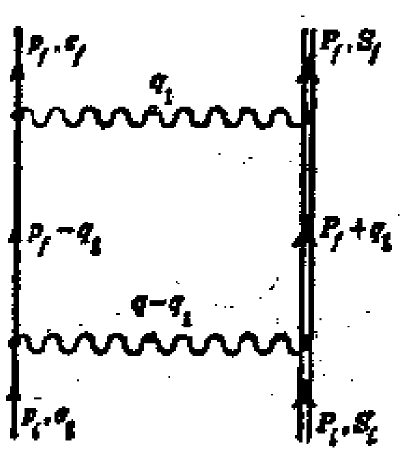


图 7.6 对电子-质子散射的四阶贡献

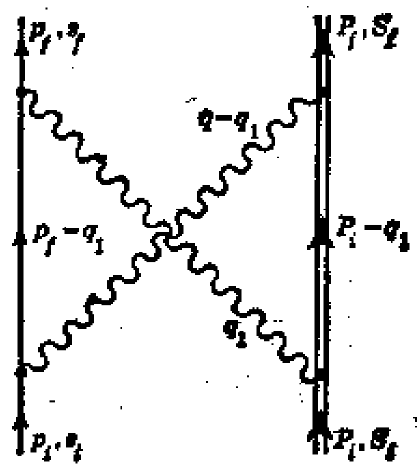


图 7.7 对电子-质子散射的四阶贡献。

对 (7.51) 和 (7.52) 求值的其余部分不是平常的，它包含一个困难的 4-维积分．对于把质子当作 Coulomb 点源这一静态极限，Dalitz[1] 已经做过计算．在这个例子中，Coulomb 相互作用的无穷大力程带来了特殊的困难．这里我们就不往下进行计算了．

7.6 韧致辐射

很有可能，在图 7.6 和 7.7 中交换的两个光子之一将满足 Einstein 条件 $q^2 = 0$．在这个情况下，光子有可能在电子与质子之间的过渡中逃逸，做为自由辐射或韧致辐射而发出．为

1) R. H. Dalitz, *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A206**, 509 (1951).

了研究与辐射场的这个相互作用对散射过程的影响，我们再次回到类似于 Schiff[1] 所用的启发式讨论．这些讨论只用较少的力气就得出有用的实验结果，它们与本书下卷[2]所讨论的、在辐射的严格量子理论处理的基础上得到的答案相一致．

把具有动量 k_μ 和极化 ε^μ 的"光子"的 4-矢势写成一个平面波

$$A^\mu(x;\ k)=\frac{\varepsilon^\mu}{\sqrt{2kV}}\left(e^{-ik\cdot x}+e^{ik\cdot x}\right) \tag{7.53}$$

其中 $k_\mu k^\mu=0$．ε^μ 是单位极化矢量，按照辐射场性质的要求，它满足横波条件

$$\varepsilon_\mu k^\mu=0 \tag{7.54}$$

在一个特定的 Lorentz 标架中，ε^μ 是纯类空的，即 $\varepsilon^\mu=(0,\boldsymbol{\epsilon})$，且有 $\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\epsilon}=1$；在一个任意 Lorentz 标架中，$\varepsilon^\mu$ 是类空的并归一化为

$$\varepsilon_\mu\varepsilon^\mu=-1 \tag{7.55}$$

(7.53) 中的归一化常数是这样选择的，以使在波 A^μ 中的能量恰是所希望的 $\omega=k_0=|\boldsymbol{k}|$．要证明它，我们计算

$$U=1/2\int d^3x(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2)=\int d^3x\boldsymbol{B}^2$$

因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}=\operatorname{curl}\mathbf{A}&=i\sqrt{k/2V}\,\hat{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{\epsilon}\left(e^{-ik\cdot x}-e^{ik\cdot x}\right)\\&=\sqrt{2k/V}\,\hat{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{\epsilon}\sin k\cdot x\end{aligned}$$

以及，按照 (7.54) 和 (7.55)

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{\epsilon}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{\epsilon}&=\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\epsilon}-(\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{\epsilon})^2\\&=\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\epsilon}-(\varepsilon^0)^2=+1\end{aligned}$$

我们有

---

1) Pauli, Schiff, 见前引．

2) J. D. Bjorken *and* S. D. Drell《相对论性量子场》，中译本即将出版．

$$U = \frac{2k}{V}\int d^3x \sin^2(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) = k = \omega$$

我们考虑在一个散射事件期间，描写这样一个"光子"辐射的散射振幅. 为了简单起见，我们回到静态近似，照(7.4)那样把质子用静态 Coulomb 场代替，并计算 S_{fi} 到 e 的非零最低阶. 图 7.8 所示这一过程的 Feynman 图相应于一个二阶过程,其中一个顶点属于电子与 Coulomb 场的相互作用,一个顶点属于轫致辐射量子的发射. 在没有外场的情况下，自由电子辐射的一阶效应是没有的. 这在运动学上是禁戒的，因为不可能使能量和动量守恒：$k^2 = 0 \neq (p_f - p_i)^2 < 0$.

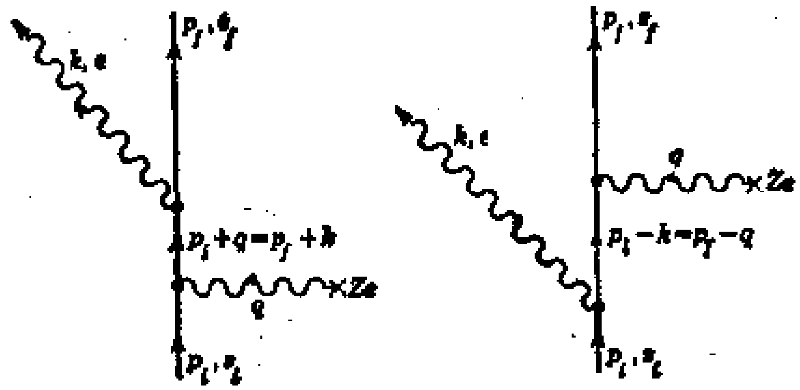


图 7.8　一个电子在 Coulomb 场中的轫致辐射

二阶 S 矩阵元是

$$\begin{aligned} S_{fi} = e^2 \int d^4x d^4y \bar{\psi}_f(x)\{ & -i\not{A}(x;k) i S_F(x-y)(-i\gamma^0) \\ & \times A_0^{\text{coul}}(y) + (-i\gamma^0) A_0^{\text{coul}}(x) i S_F(x-y) \\ & \times [-i\not{A}(y;k)]\}\psi_i(y) \end{aligned} \tag{7.56}$$

其中
$$A_0^{\text{coul}}(\boldsymbol{x}) = \frac{-Ze}{4\pi|\boldsymbol{x}|}$$

而两项相应于顶点的两种顺序,如图 7.8 所示.

照例,把(7.56)变换到动量空间是方便的;做法是对所有

系数作 Fourier 展开并对坐标积分. 这个已经成为惯例的运算结果是

$$S_{fi}=\frac{-Ze^3}{V^{3/2}}2\pi\delta(E_f+k-E_i)\frac{1}{\sqrt{2k}}\sqrt{\frac{m^2}{E_fE_i}}\frac{1}{|\boldsymbol{q}|^2}$$
$$\times\bar{u}(p_f,s_f)\left[(-i\not{\epsilon})\frac{i}{\not{p}_f+\not{k}-m}(-i\gamma_0)\right.$$
$$\left.+(-i\gamma_0)\frac{i}{\not{p}_i-\not{k}-m}(-i\not{\epsilon})\right]u(p_i,s_i)\qquad(7.57)$$

式中 $q=p_f+k-p_i$. 有一个附加的贡献来自 (7.53) 的第一项,这一项的能量 δ 函数是 $\delta(E_i+k-E_f)$. 这一项描写在散射过程中的能量吸收, 因而对于在这里感兴趣的过程没有贡献, 在这过程中入射电子交出能量给辐射场再以能量 $E_f=E_i-k<E_i$ 放出. 我们注意 (7.57) 的新特点,应当把它增添到我们关于 Feynman 振幅的不断增长着的知识之中去: 因子 $(-i\not{\epsilon})$ 出现在发射出极化为 ϵ_μ 的自由光子的顶点上,而 $1/\sqrt{2kV}$ 作为光子"波函数"的归一化因子出现.

现在可以从 S 矩阵(7.57)来计算韧致辐射截面. 我们把推导限制在 $k\to 0$, 即,限制在发射非常软的光子. 更一般的结果(称作 Bethe-Heitler 公式)在很多教科书上都有. 在这个限制下, (7.57) 中方括号内的因子可以作如下的近似:

$$-i\bar{u}(p_f,s_f)\left[\not{\epsilon}\frac{(\not{p}_f+\not{k}+m)\gamma_0}{(p_f+k)^2-m^2}+\gamma_0\frac{(\not{p}_i-\not{k}+m)\not{\epsilon}}{(p_i-k)^2-m^2}\right]$$
$$\times u(p_i,s_i)\cong-i\bar{u}(p_f,s_f)\left\{\frac{[2\epsilon\cdot p_f-(\not{p}_f-m)\not{\epsilon}]\gamma_0}{2k\cdot p_f}\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma_0[2\epsilon\cdot p_i-\not{\epsilon}(\not{p}_i-m)]}{-2k\cdot p_i}\right\}u(p_i,s_i)$$

$$=-i\bar{u}(p_f,s_f)\gamma_0u(p_i,s_i)\left(\frac{\epsilon\cdot p_f}{k\cdot p_f}-\frac{\epsilon\cdot p_i}{k\cdot p_i}\right)\qquad(7.58)$$

式中我们已在分子中略去了 $k\to 0$ 因子，并在最后一步利用了 Dirac 旋量的性质(3.9). 在 $k\to 0$ 的极限下，轫致辐射矩阵元恰好是弹性散射振幅的倍数. 现在着手求截面，我们求(7.57)和(7.58)的 S_{fi} 的平方，除以流密度 $|\boldsymbol{v}|/V$ 并除以 $2\pi\delta(0)$ 以构成跃迁几率，并在相空间的观察间隔中对末态 $(V^2d^3kd^3p_f)/(2\pi)^6$ 求和.（对于非极化电子的截面，我们还应该对电子自旋态的末态求和并对初态求平均）. 我们得到

$$d\sigma=\frac{Z^2e^6m^2}{2k|v_i|E_fE_i}\int\left(\frac{\varepsilon\cdot p_f}{k\cdot p_f}-\frac{\varepsilon\cdot p_i}{k\cdot p_i}\right)^2$$

$$\times\frac{|\bar{u}(p_f,s_f)\gamma_0u(p_i,s_i)|^2}{|q|^4}$$

$$\times 2\pi\delta(E_f+k-E_i)\frac{d^3kd^3p_f}{(2\pi)^6}$$

辨认出与(7.11)中的弹性散射截面相同的诸项，我们求得

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f}=\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_f}\right)_{弹性}\frac{e^2}{2k(2\pi)^3}k^2d\Omega_kdk$$

$$\times\left(\frac{\varepsilon\cdot p_f}{k\cdot p_f}-\frac{\varepsilon\cdot p_i}{k\cdot p_i}\right)^2\vartheta(E_i-m-k)\qquad(7.59)$$

这是电子在立体角 $d\Omega_f$ 内被观察到、而一个极化为 ε 的光子在间隔 $d\Omega_kdk$ 中以 $\boldsymbol{k}$ 发射的截面. 这样，在软光子发射的极限下，我们可以把非弹性截面表达为散射电子的能量和角度相同的弹性截面的倍数.

我们在(7.59)中看到，光子能谱的变化规律如 dk/k，因此发射一个零能光子的几率为无穷大.这是“红外灾难”.这就要求仔细分析观察轫致辐射的实际实验条件，以便消除这一无穷大所带来的困难.关键点在于：每一部探测仪器都有一个有限的能量分辨率；而如果它在一个包括 $k=0$ 在内的能量间隔中接受非弹性散射电子，它也接受弹性散射电子.为了与实

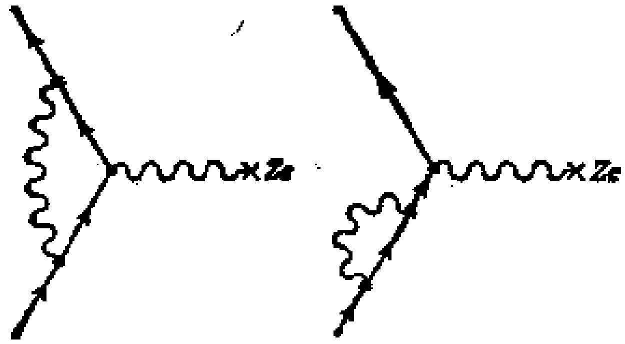


图 7.9 对 Coulomb 散射的辐射修正.

验一致,我们必须因此把弹性和非弹性截面两者(计算到 e^2 的同一阶)都包括在内. 因为轫致辐射贡献 (7.59) 相对于弹性散射是 e^2 的阶, 我们必须把对 $(d\sigma/d\Omega_f)_{弹性}$ 的辐射修正 (到 e^2 的同一阶)也包括在内.这是由两种类型的项产生的. 存在着如图 7.4 和图 7.5 所说明的、相应于电子在 Coulomb 场中的二阶散射的那些项. 此外, 我们必须把电子通过辐射场与自己的相互作用考虑在内. 这些贡献的 Feynman 图(图 7.9) 表明: 发源于电子的虚光子放出后又飞回来,而不是如图 7.4 那样与 Coulomb 源(或质子)衔接. 来自这些图的振幅包含一个发散项,它准确地抵消了 (7.59) 中在 $k=0$ 的发散. 在着手这项需要谨慎从事的计算工作之前, 我们先来用更多的训练和经验武装自己.

但是, 在离开 (7.59) 之前, 我们将估算在把弹性极限除外的间隔 ΔE 中发射软轫致辐射的截面. 我们从对光子的极化求和(通过利用一项由 Feynman[1] 引进的非常方便的技术)开始. 注意到,如果我们把 (7.57) 中光子的极化 ϵ^μ 换成它的 4-动量 k^μ, 则精确的散射矩阵元就是零. 这一性质对于截面 (7.59) 的软光子近似也是有效的. 这是流守恒 $\partial j_\mu(x)/\partial x_\mu$

1) R.P. Feynman, *Phys. Rev.*, **76**, 769(1949)

$=0$ 的一个后果，它在动量空间中的类似公式是 $k_\mu j^\mu(k)=0$. 需要作一个电动力学中的规范不变计算，因为规范变换在动量空间的类似式是 $A^\mu(k)\to A^\mu(k)+k^\mu\Lambda(k)$，而正比于 k^μ 的附加因子决不应改变最后的结果.

利用这一结果，我们写出

$$\varepsilon_\mu\varepsilon_\nu J^{\mu\nu}=\left(\frac{\varepsilon\cdot p_f}{k\cdot p_f}-\frac{\varepsilon\cdot p_i}{k\cdot p_i}\right)^2 \tag{7.60}$$

并转动坐标使得 $k^\mu=(k^0,k^1,0,0)$，其中 $k^1=k^0=k$. 因为 (7.60) 是一个标量，我们可以在任意 Lorentz 框架中来计算它，特别是，我们选择标量势为零 ((7.53) 中 $A^0(x)=0$) 的框架. 在这个坐标系中 $\mathbf{A}(x)$ 是横的，而两个独立的横极化，按照 (7.54) 和 (7.55)，可以指定为

$$\varepsilon^{(1)}=(0,0,1,0)$$

和

$$\varepsilon^{(2)}=(0,0,0,1)$$

将 (7.60) 对极化求和，给出

$$\sum_{\text{极化}}\varepsilon_\mu\varepsilon_\nu J^{\mu\nu}=J^{22}+J^{33}=J^{00}-J^{11}-\sum_{\mu=0}^{3}J^\mu_\mu$$

正如上面看到的，因为 $k_\mu J^{\mu\nu}=k_\nu J^{\mu\nu}=0$，于是 $J^{0\nu}=J^{1\nu}$，$J^{\nu 0}=J^{\nu 1}$，则 $J^{00}=J^{11}$ 所以

$$\sum_{\text{极化}}\varepsilon_\mu\varepsilon_\nu J^{\mu\nu}=-J^\mu_\mu$$

式中我们又回到求和的约定. 极化求和现在已经换成一个明显协变的表达式，它带来了一个相当普遍的、仅仅以流守恒为基础的有意义的结果：进行极化求和的结果是

$$\sum_{\text{极化}}[\varepsilon_\mu(k)a^\mu(k)][\varepsilon_\nu(k)b^\nu(k)]=-a\cdot b \tag{7.61}$$

假如 a^μ 和 b^μ 都是守恒流；也就是说，$k\cdot a(k)=k\cdot b(k)=0$.

应用(7.61)，给出已对极化求和过的韧致辐射截面(7.59)。把它对所有的光子发射角和在间隔为 $0<k_{min}\leqslant k\leqslant k_{max}\ll E_i$ 中的能量进行积分，我们写出：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f}=\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_f}\right)_{弹性}\frac{\alpha}{4\pi^2}\int_{k_{min}}^{k_{max}}kdk\int d\Omega_k\left[\frac{2p_f\cdot p_i}{k\cdot p_f k\cdot p_i}\right.$$

$$\left.-\frac{m^2}{(k\cdot p_f)^2}-\frac{m^2}{(k\cdot p_i)^2}\right]=\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_f}\right)_{弹性}\frac{\alpha}{\pi}\ln\frac{k_{max}}{k_{min}}$$

$$\times\int\frac{d\Omega_k}{4\pi}\left[\frac{2(1-\boldsymbol{\beta}_f\cdot\boldsymbol{\beta}_i)}{(1-\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{\beta}_f)(1-\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{\beta}_i)}\right.$$

$$\left.-\frac{m^2}{E_f^2(1-\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{\beta}_f)^2}-\frac{m^2}{E_i^2(1-\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{\beta}_i)^2}\right]\qquad(7.62)$$

式中 $\boldsymbol{\beta}_i$ 和 $\boldsymbol{\beta}_f$ 分别是电子的初速度和末速度，在软光子的极限下 $\beta_i=\beta_f=\beta$，且对于散射角 ϑ_f 有 $\boldsymbol{\beta}_i\cdot\boldsymbol{\beta}_f=\beta^2\cos\vartheta_f$。(7.62)中最后两项的积分是简单的。

$$\int\frac{d\Omega_k}{4\pi}\frac{m^2}{E^2(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\hat{\boldsymbol{k}})^2}=\frac{m^2}{E^2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dz\frac{1}{(1-\beta z)^2}=1$$

利用又是由 Feynman[1] 引进和推广的另一个技巧，很容易算出第一个积分。这包括用一个参数积分把两个分母联合起来

$$\frac{1}{ab}=\int_0^1\frac{dx}{[ax+b(1-x)]}\qquad(7.63)$$

用在这里，上式给出

$$2\int\frac{d\Omega_k}{4\pi}\frac{1-\boldsymbol{\beta}_f\cdot\boldsymbol{\beta}_i}{(1-\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{\beta}_f)(1-\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{\beta}_i)}$$

$$=2(1-\boldsymbol{\beta}_f\cdot\boldsymbol{\beta}_i)\int_0^1dx\int\frac{d\Omega_k}{4\pi}$$

1) 见前引

$$\times \frac{1}{[1-\hat{\boldsymbol{k}}\cdot(\boldsymbol{\beta}_f x+\boldsymbol{\beta}_i(1-x))]^2}$$

$$=2(1-\boldsymbol{\beta}_f\cdot\boldsymbol{\beta}_i)\int_0^1 dx\,\frac{1}{1-|\boldsymbol{\beta}_f x+\boldsymbol{\beta}_i(1-x)|^2}$$

$$=2(1-\beta^2\cos\vartheta)$$

$$\times\int_0^1\frac{dx}{[1-\beta^2+4\beta^2\sin^2(\vartheta/2)x(1-x)]}$$

$$\approx\begin{cases}2\left(1+\dfrac{4}{3}\beta^2\sin^2\dfrac{\vartheta}{2}\right)+0(\beta^4) & \beta\ll 1\\[2ex] 2\ln\left(\dfrac{-q^2}{m^2}\right)+0\left(\dfrac{m^2}{q^2}\right) & \dfrac{m^2}{q^2}\ll 1\end{cases}$$

$$q^2=(p_f-p_i)^2\cong -4E^2\sin^2\frac{\vartheta}{2}$$

于是，软轫致辐射截面是

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f}=\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_f}\right)_{\text{弹性}}\frac{2\alpha}{\pi}\ln\frac{k_{\max}}{k_{\min}}$$

$$\times\begin{cases}\dfrac{4}{3}\beta^2\sin^2\dfrac{\vartheta}{2}+0(\beta^4) & NR\\[2ex] \ln\left(\dfrac{-q^2}{m^2}\right)-1+0\left(\dfrac{m^2}{q^2}\right) & ER\end{cases}\qquad(7.64)$$

式中的两种形式适用于电子能量的非相对论极限（NR）和极端相对论极限（ER）．我们必须把（7.64）加到对 $(d\sigma/d\Omega)_{\text{弹性}}$ 的辐射修正上，以便在 $k_{\min}\to 0$ 得到有限的结果。

7.7 Compton 散射

现在我们可以把与平面波场（7.53）的二阶相互作用包括在内．令（7.53）代表一入射光子，它在一个顶点被一个电子

所吸收，且

$$A'_\mu(x'; k') = \frac{1}{\sqrt{2k'V}} \epsilon'_\mu (e^{-ik'\cdot x'} + e^{ik'\cdot x'}) \quad (7.65)$$

在第二个顶点上发射末态光子．这个过程，称为 Compton 散射，在光子按照下列关系

$$k + p_i = k' + p_f \quad (7.66)$$

为自由电子散射时，保持能量和动量守恒．二阶 Compton 振幅与 (7.56) 的差别在于把 $\gamma_0 A_0^{\text{coul}}(x)$ 替换成 $\gamma_\mu A^\mu(x, k')$．把 (7.53) 和 (7.65) 代入到二阶 S 矩阵，并实现到动量空间的 Fourier 变换，给出

$$S_{fi}^{(\text{Compton})} = \frac{e^2}{V^2}\sqrt{\frac{m^2}{E_f E_i}} \frac{1}{\sqrt{2k2k'}} (2\pi)^4 \delta^4(p_f + k' - p_i - k) \bar{u}(p_f \cdot s_f) \left[(-i\not{\epsilon}') \frac{i}{\not{p}_i + \not{k} - m} (-i\not{\epsilon}) + (-i\not{\epsilon}) \frac{i}{\not{p}_i - \not{k}' - m} (-i\not{\epsilon}') \right] u(p_i, s_i) \quad (7.67)$$

与图 7.10 的 Feynman 图相对应． 三个附加项(其中的 k 和

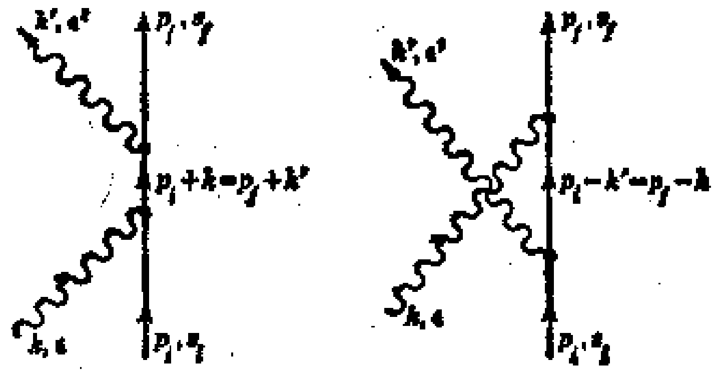


图 7.10 Compton 散射

[或] k' 变号)已经从 (7.67) 中去掉．其中的两项为零，因为

它们导致的 δ^4 函数相应于能量-动量条件

$$p_i = p_f + k + k' \text{ 和 } p_f = p_i + k + k'$$

而这是不可能满足的．这些条件相应于一个自由电子衰变到末态为一个自由电子加两个光子的过程，这在运动学上是禁戒的． 第三项（两个光子的 k 和 k' 彼此交换了）导致条件 $k'+p_i = k+p_f$，这相应于动量为 k' 的入射光子散射成动量为 k 的末态光子．这个运动学约束条件不可能与描写我们现在条件的 (7.66) 同时得到满足，因而可以去掉． 保留在 (7.67) 中的项来自 (7.53) 的第一项 $e^{-ik\cdot x}$，它相应于在 x 从辐射场吸收一个 4-动量为 k'' 的光子，还来自 (7.65) 的第二项 $e^{+ik'\cdot x'}$，代表在 x' 发射一个 4-动量为 k' 的光子。

注意，在 (7.67) 中的 $S_{fi}^{(\text{Compton})}$ 在替换

$$k, \epsilon \longleftrightarrow -k', \epsilon'$$

下是对称的． 这叫做交叉对称，而且它在所有的更高阶相互作用中都保持为精确的对称性[1]． 它在粒子物理中起有重要作用．

对 Compton 散射截面的计算是沿着以前所发展的线索进行的，只是旋量代数提出了某些更为难以克服的障碍． 我们构成截面的步骤是：把振幅 (7.67) 平方，除以 $(2\pi)^4\delta^4(0)$ 以构成跃迁率，除以入射流密度 $|v|/V$ 和除以单位体积中的靶粒子数 $1/V$，并对相空间 $[V^2/(2\pi)^6]d^3p_fd^3k'$ 求和

$$d\sigma = \frac{e^4 m}{(2\pi)^2 2kE_i|v|}\int\Bigg|\bar{u}(p_f, s_f)\times\left(\not{\epsilon}'\frac{1}{\not{p}_i+\not{k}-m}\not{\epsilon}+\not{\epsilon}\frac{1}{\not{p}_i-\not{k}'-m}\not{\epsilon}'\right)u(p_i, s_i)\Bigg|^2\times\delta^4(p_f+k'-p_i-k)\frac{md^3p_f}{E_f}\frac{d^3k'}{2k'} \qquad (7.68)$$

1) 见本书下卷．

如果我们在初始电子为静止的实验室坐标系中运算，因子 $m/kE_i|\boldsymbol{v}|$ 恰好就是 $(1/k)$；而对所有反冲电子、以及对散射到实验室系中角度 ϑ 附近的立体角 $d\Omega_{k'}$ 内的光子的积分，借助于 (7.40)，给出

$$
\begin{aligned}
d\Omega_{k'}\int\frac{k'^2dk'}{2k'}\int\frac{md^3p_f}{E_f}\delta^4(p_f+k'-p_i-k)
&= md\Omega_{k'}\int_0^\infty k'dk'\delta([k+p_i-k']^2-m^2)\\
&\quad\times\vartheta(k+m-k')\\
&= md\Omega k'\int_0^{k+m}k'dk'\delta[2m(k-k')\\
&\quad-2kk'(1-\cos\vartheta)]\\
&= \frac{k'^2}{2k}d\Omega_{k'}
\end{aligned}
\tag{7.69}
$$

按照 (7.69) 中的 δ 函数，式中的 k' 和 k 由 Compton 条件相联系

$$
k'=\frac{k}{1+(k/m)(1-\cos\vartheta)}=\frac{k}{1+(2k/m)\sin^2(\vartheta/2)}
\tag{7.70}
$$

此时方程 (7.68) 简化为

$$
\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega}=\alpha^2\left(\frac{k'}{k}\right)^2\bigg|\bar{u}(p_f\cdot s_f)\bigg(&\not{\epsilon}\frac{1}{\not{p}_i+\not{k}-m}\not{\epsilon}\\
&+\not{\epsilon}\frac{1}{\not{p}_i-\not{k}'-m}\not{\epsilon}'\bigg)u(p_i,s_i)\bigg|^2
\end{aligned}
\tag{7.71}
$$

它描写电子和光子在初态和末态都极化的微分截面．选取一个特殊的规范，我们便可以进一步使旋量矩阵元大大简化：在这个规范中，初态和末态光子在实验室坐标系里都是横极化的；即我们选取

$$\epsilon^{\mu}=(0,\boldsymbol{\epsilon})\quad \text{且}\ \boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{k}=0$$
$$\epsilon^{\mu'}=(0,\boldsymbol{\epsilon}')\quad \text{且}\ \boldsymbol{\epsilon}'\cdot\boldsymbol{k}'=0$$

由此得出 $\epsilon\cdot p_i=\epsilon'\cdot p_i=0$，从而旋量因子简化为

$$\bar{u}(p_f,s_f)\left(\not{\epsilon}'\frac{\not{p}_i+\not{k}+m}{2k\cdot p_i}\not{\epsilon}+\not{\epsilon}\frac{\not{p}_i-\not{k}'+m}{-2k'\cdot p_i}\not{\epsilon}'\right)$$
$$\times u(p_i,s_i)=-\bar{u}(p_f,s_f)\left(\frac{\not{\epsilon}'\not{\epsilon}\not{k}}{2k\cdot p_i}\right.$$
$$\left.+\frac{\not{\epsilon}\not{\epsilon}'\not{k}'}{2k'\cdot p_i}\right)u(p_i,s_i)$$

其中我们把自旋矩阵作了反对易调动，并和过去一样利用了 Dirac 旋量的性质：$(\not{p}_i+m)\not{\epsilon}u(p_i,s_i)=\not{\epsilon}(-\not{p}_i+m)u(p_i,s_i)=0$。把这个结果代入(7.71)，为得一个非极化的电子截面需要对末态自旋 s_f 求和，对初态自旋 s_i 求平均，借助于(7.13)，我们求得

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega}=\frac{1}{2}\sum_{\pm s_i,s_f}\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega}$$
$$=\frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{k'}{k}\right)^2\operatorname{Tr}\frac{\not{p}_f+m}{2m}\left(\frac{\not{\epsilon}'\not{\epsilon}\not{k}}{2k\cdot p_i}+\frac{\not{\epsilon}\not{\epsilon}'\not{k}'}{2k'\cdot p_i}\right)$$
$$\times\frac{\not{p}_i+m}{2m}\left(\frac{\not{k}\not{\epsilon}\not{\epsilon}'}{2k\cdot p_i}+\frac{\not{k}'\not{\epsilon}'\not{\epsilon}}{2k'\cdot p_i}\right)\tag{7.72}$$

上式向我们提出了包含多达八个 γ 矩阵的迹．有三个不同的迹需要计算；两个具有分母因子 $(k\cdot p_i)(k'\cdot p_i)$ 的交叉项，按照迹定理 6 和迹的轮换性质，是全同的．在化简这种包含同一矢量不止一次的复杂的迹时，把因子作反对易调动直到相同的矢量彼此相邻排列是通常所希望的，此时恒等式 $\not{a}\not{a}=a^2$ 消去了两个 γ 矩阵．在这里应用这一技巧，我们把上面的迹简化如下：

$$T_1=\operatorname{Tr}(\not{p}_f+m)\not{\epsilon}'\not{\epsilon}\not{k}(\not{p}_i+m)\not{k}\not{\epsilon}\not{\epsilon}'$$

$$= \mathrm{Tr}\not p_f \not\epsilon' \not\epsilon \not k \not p_i \not k \not\epsilon \not\epsilon'$$

正比于 m^2 的项为零，因为 $k^2 = 0$

$$= \mathrm{Tr}\,2k \cdot p_i \not p_f \not\epsilon' \not\epsilon \not k \not\epsilon \not\epsilon' = 2k \cdot p_i \mathrm{Tr}\not p_f \not\epsilon' \not k \not\epsilon'$$

$$= 8k \cdot p_i (k \cdot p_f + 2k \cdot \epsilon' p_f \cdot \epsilon') \quad \text{按定理3}$$

$$= 8k \cdot p_i [k' \cdot p_i + 2(k \cdot \epsilon')^2]$$

其中我们已经用了能量-动量守恒 $k + p_i = k' + p_f$，因此

$$k' \cdot p_i = k \cdot p_f \quad 和 \quad \epsilon' \cdot p_f = \epsilon' \cdot k \tag{7.73}$$

用相同的方法我们计算

$$T_2 = \mathrm{Tr}(\not p_f + m)\not\epsilon \not\epsilon' \not k' (\not p_i + m) \not k' \not\epsilon' \not\epsilon$$

它和 T_1 的区别仅在于替换 $\epsilon, k \longleftrightarrow \epsilon', -k'$，因此

$$T_2 = 8k' \cdot p_i [k \cdot p_i - 2(k' \cdot \epsilon)^2]$$

对于最后一个迹，应用已指出的种种技巧，我们求得

$$T_3 = \mathrm{Tr}(\not p_f + m)\not\epsilon' \not\epsilon \not k (\not p_i + m) \not k' \not\epsilon' \not\epsilon$$

$$= \mathrm{Tr}(\not p_i + m)\not\epsilon' \not\epsilon \not k (\not p_i + m) \not k' \not\epsilon' \not\epsilon + \mathrm{Tr}(\not k - \not k')\not\epsilon' \not\epsilon \not k \not p_i \not k' \not\epsilon' \not\epsilon$$

$$= \mathrm{Tr}(\not p_i + m)\not k (\not p_i + m) \not k' \not\epsilon' \not\epsilon \not\epsilon' \not\epsilon + 2k \cdot \epsilon' \mathrm{Tr}(-1)$$

$$\times \not k \not p_i \not k' \not\epsilon' - 2k' \epsilon \mathrm{Tr}(-1) \not\epsilon \not k \not p_i \not k'$$

$$= 2k \cdot p_i \mathrm{Tr}\not p_i \not k' \not\epsilon' \not\epsilon \not\epsilon' \not\epsilon - 8(k \cdot \epsilon')^2 k' \cdot p_i + 8(k' \cdot \epsilon)^2 k$$

$$\cdot p_i$$

$$= 8(k \cdot p_i)(k' \cdot p_i)[2(\epsilon' \cdot \epsilon)^2 - 1] - 8(k \cdot \epsilon')^2 k' \cdot p_i$$

$$+ 8(k' \cdot \epsilon)^2 k \cdot p_i$$

把这些迹都集中到 (7.72)，我们求得 Compton 散射的 Klein 一仁科公式[1]

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4m^2}\left(\frac{k'}{k}\right)^2 \left[\frac{k'}{k} + \frac{k}{k'} + 4(\epsilon' \cdot \epsilon)^2 - 2\right] \tag{7.74}$$

其中 k' 和 k 按照 (7.70) 通过散射角相联系. 在低能极限 $k \to 0$，上式简化为经典的 Thomson 散射

---

1) O. Klein and Y. Nishina, *Z. Physik*, **52**, 853 (1929).

$$\left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega}\right)_{k\to 0} = \frac{\alpha^2}{m^2}(\epsilon\cdot\epsilon')^2$$

其中

$$\frac{\alpha}{m} = \frac{e^2}{4\pi mc^2} = 2.8\times 10^{-13}\text{cm}$$

是经典电子半径. 当散射角 $\vartheta\to 0$ 时，$k\to k'$，我们发现 Thomson 截面在前向方向上对所有能量都有效. 最后，我们可以对末态光子的极化 ϵ' 求和，对初态 ϵ 求平均以求得非极化截面. 计算的程序与经典电动力学中对光子的散射的计算完全一样，我们借用其结果

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2m^2}\left(\frac{k'}{k}\right)^2\left(\frac{k'}{k}+\frac{k}{k'}-\sin^2\vartheta\right)$$

容易由上式对光子的立体角积分而得出总截面. 引入 $z=\cos\vartheta$ 并应用 (7.70)

$$\bar{\sigma} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2}\int_{-1}^{1}dz\left\{\frac{1}{[1+(k/m)(1-z)]^3}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{[1+(k/m)(1-z)]}-\frac{1-z^2}{[1+(k/m)(1-z)]^2}\right\} \tag{7.75}$$

在低能下，再次出现 Thomson 截面

$$\bar{\sigma} = \frac{8\pi}{3}\frac{\alpha^2}{m^2} \quad \text{对于} \ \frac{k}{m}\to 0$$

在高能下，总截面是

$$\bar{\sigma}\cong\frac{\pi\alpha^2}{km}\left[\ln\frac{2k}{m}+\frac{1}{2}+O\left(\frac{m}{k}\ln\frac{k}{m}\right)\right]$$

其中占优势的对数项来自 (7.75) 的第二项.

7.8 粒子偶湮灭为 γ 射线

如果我们把 Compton 散射的 Feynman 图转 90 度，如图

7.11 所示，我们就遇到另一种物理上相当重要的过程．就是电子-正电子偶湮灭为两个光子．在动量空间中相应的 S 矩阵元(其运动学如图所示)是

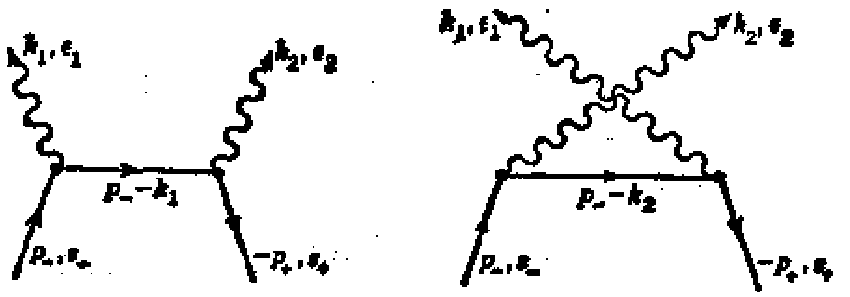


图 7.11　粒子偶湮灭

$$S_{fi}^{(\text{对})} = \frac{e^2}{V^2}\sqrt{\frac{m^2}{E_+E_-2k_12k_2}}(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2-p_+-p_-)$$

$$\times \bar{v}(p_+, s_+)\Big[(-i\not{\epsilon}_2)\frac{i}{\not{p}_- - \not{k}_1 - m}(-i\not{\epsilon}_1) + (-i\not{\epsilon}_1)$$

$$\times \frac{i}{\not{p}_- - \not{k}_2 - m}(-i\not{\epsilon}_2)\Big]u(p_-, s_-) \tag{7.76}$$

并且如同 Bose 统计所要求的，上式对于两个光子的交换是对称的．按照我们用 Feynman 传播子的描述，这一过程相应于这样的图象：一个产生于过去的电子，散射到一个负能 $(-p_+)$ 态并(沿时间)逆向传播到过去．沿途它产生两个光子，也就是说，它两次放出能量给辐射场．这是此过程能够发生的 (e^2 的)最低阶，因为粒子偶湮灭为单个光子不能使能量和动量守恒．为了保证 $S_{fi}^{(\text{对})}$ 具有交换两个光子的对称性，必须包括两个图．

回头来看 Compton 散射振幅，我们注意到在 (7.76) 和 (7.67) 之间有非常强的类似．确实，作替换

$$\epsilon, k \longleftrightarrow \epsilon_1, -k_1$$

$$\epsilon', k' \longleftrightarrow \epsilon_2, +k_2 \tag{7.77}$$
$$p_i, s_i \longleftrightarrow p_-, s_-,$$
$$p_f, s_f \longleftrightarrow -p_+, s_+$$

会使两个振幅互相变换到对方。这是普遍的替换规则[1]的一个例子，到任意阶替换规则都是有效的，而且它把如下类型的过程

$$A + B \to C + D$$

与(举例来说)过程

$$A + \bar{C} \to \bar{B} + D$$

联系起来，其中 $\bar{B}$ 标记 B 的反粒子，等等. 这一替换规则的另一个例子用于韧致辐射振幅 (7.56) (相应于图 7.8 的 Feynman 图)和在 Coulomb 场中粒子偶产生的振幅(如图 7.12 所示)的关系.

通过熟知的步骤，我们从矩阵元 (7.76) 得到微分截面。对于一个非极化的正电子入射到一个在实验室坐标系中为静止的非极化电子的情形，结果是

$$d\bar{\sigma} = \frac{e^4}{(2\pi)^2}\int \frac{m}{E_+\beta_+}\frac{(-1)}{4}\operatorname{Tr}\frac{m - \not{p}_+}{2m}\left(\frac{\not{\epsilon}_2\not{k}_1\not{\epsilon}_1}{2p_-\cdot k_1} + \frac{\not{\epsilon}_1\not{k}_2\not{\epsilon}_2}{2p_-\cdot k_2}\right)\frac{\not{p}_- + m}{2m}\left(\frac{\not{\epsilon}_1\not{k}_1\not{\epsilon}_2}{2p_-\cdot k_1} + \frac{\not{\epsilon}_2\not{k}_2\not{\epsilon}_1}{2p_-\cdot k_2}\right)\frac{d^3k_1}{2k_1}\cdot\frac{d^3k_2}{2k_2}\delta^4(k_1 + k_2 - p_- - p_+) \tag{7.78}$$

其中 $\beta_+ = p_+/E_+$ 是入射正电子速度，因子 1/4 来自对初态电子和初态正电子的自旋平均，而(大概是靠不住的!)负号来自我们对正电子旋量的归一化[见方程 (3.9)]。矩阵元的简化

1) 在本书的下卷中给出了到所有阶的证明.

了的形式是由于对于实验室参考系选取横规范

$$\epsilon_1 \cdot p_- = \epsilon_2 \cdot p_- = 0$$

并且按照替换规则，这是与用于计算 Compton 散射的规范是相同的规范. 它在这里的优点在于：利用替换 (7.77)，我们可以从 (7.72) 和 (7.73) 得到迹. 剩下的唯一工作是化简对实验室系运动学的 δ 函数：

$$\begin{aligned}
&\int \frac{d^3k_1}{2k_1}\frac{d^3k_2}{2k_2}\delta^4(k_1 + k_2 - p_+ - p_-) \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{2} k_1 dk_1 d\Omega_{k_1} \delta[(p_+ + p_-)^2 - 2k_1 \cdot (p_+ + p_-)] \\
&\quad \times \vartheta(E_+ + E_- - k_1) \\
&= \frac{d\Omega_{k_1}}{2}\int_0^{E_+ + m} k_1 dk_1 \delta[2m^2 + 2mE_+ - 2k_1 \\
&\quad \times (m + E_+ - p_+ \cos\vartheta)] \\
&= \frac{1}{4}\frac{m(m + E_+)}{[m + E_+ - p_+ \cos\vartheta]} d\Omega_{k_1} \qquad (7.79)
\end{aligned}$$

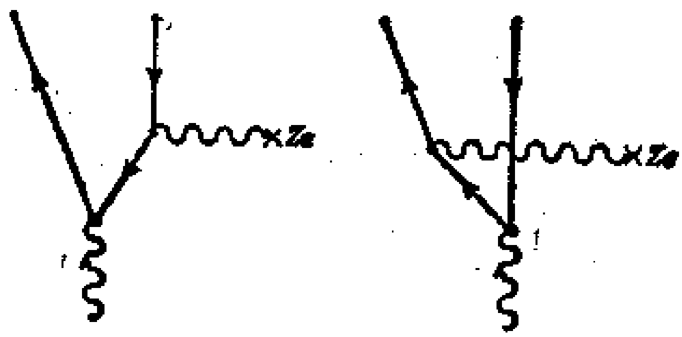


图 7.12 在 Coulomb 场中粒子偶的产生

把上面的迹和相空间的结果收集到 (7.78) 中，我们求得用实验室能量和角度表示的、粒子偶湮灭截面的下列结果：

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_{k_1}} = -\frac{\alpha^2(m + E_+)}{8p_+[m + E_+ - p_+\cos\vartheta]^2}\left[-\frac{k_2}{k_1} - \frac{k_1}{k_2}\right.$$

$$
\begin{aligned}
&+ 4(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)^2 - 2 \Big] \\
&- \frac{\alpha^2(m+E_+)}{8p_+(m+E_+-p_+\cos\vartheta)^2}\left[\frac{E_+-p_+\cos\vartheta}{m}\right. \\
&\left. + \frac{m}{E_+-p_+\cos\vartheta} + 2 - 4(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)^2\right]
\end{aligned}
\tag{7.80}
$$

按照 (7.78) 和 (7.79) 中的运动学约束，式中

$$k_1 = \frac{m(m+E_+)}{m+E_+-p_+\cos\vartheta}$$

和

$$k_2 = m + E_+ - k_1 = \frac{E_+-p_+\cos\vartheta}{m} k_1$$

为了求得总截面，我们把 $d\sigma/d\Omega_{k_1}$ 对末态光子的极化求和，并对立体角 $d\Omega_{k_1}$ 积分．后一步骤需要小心，因为末态包含着两个全同粒子．方程(7.80)告诉我们：光子之一在 $d\Omega_{k_1}$ 中放出；由于它们的不可分辨性，这个光子可以是两个光子中的任一个．如果我们在整个 4π 立体角中对 $d\sigma/d\Omega_{k_1}$ 积分，我们就对每一个不可分辨的态计算了正好两次，也就是说，我们就显然是对每一散射事件计算了两个光子．因此，在构成总截面时我们应该取这个积分的一半

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{2}\int \frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_{k_1}} d\Omega_{k_1} \tag{7.81}$$

现在容易从 (7.81) 和 (7.80) 得到总截面的低能近似和高能近似：当 $p_+ \to 0$ 时，$\boldsymbol{k}_1 \to -\boldsymbol{k}_2$，而$(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)^2$的极化平均$\to \frac{1}{2}$；因此[1]

$$\bar{\sigma} = \frac{\alpha^2\pi}{\beta_+ m^2}[1 + 0(\beta_+^2)] \quad \beta_+ \ll 1$$

1) 这是 $\bar{\sigma}$ (当 $\beta_+ \to 0$ 时)的一个粗糙近似．应该用 Coulomb 波函数代替电子和正电子的平面波．

在极端相对论极限下，我们求得

$$\bar{\sigma} = \frac{\pi\alpha^2}{mE_+}\left[\ln\frac{2E_+}{m} - 1 + 0\left(\frac{m}{E_+}\ln\frac{E_+}{m}\right) + \cdots\right]$$

式中 (7.80) 的前两项对头一阶的贡献相等，而 (7.80) 的后两项之和比前者小一个因子 m/E_+. 这些结果是 1930 年首先由 Dirac 得到的[1].

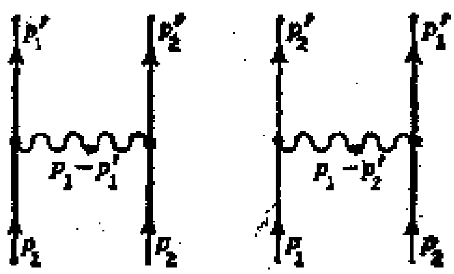


图 7.13 电子-电子散射

7.9 电子-电子和电子-正电子散射

电子-电子散射的处理方法非常类似于电子-质子散射. 但是，由于电子的全同性，有一个附加的 Feynman 图出现. 图 7.13 表示了这一过程的两个图，还定义了有关的运动学. 相应的散射振幅是（其中略去了自旋附标，而且因子与 (7.35) 中的电子-质子振幅的因子一样）.

$$S_{fi}^{M} = \frac{-e^2m^2}{V^2\sqrt{E_1E_2E_1'E_2'}} \times \left[i\frac{\bar{u}(p_1')(-i\gamma_\mu)u(p_1)\bar{u}(p_2')(-i\gamma^\mu)u(p_2)}{(p_1-p_1')^2} - i\frac{\bar{u}(p_1')(-i\gamma_\mu)u(p_2)\bar{u}(p_2')(-i\gamma^\mu)u(p_1)}{(p_1-p_2')^2}\right]$$

---

1) P.A.M.Dirac, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **26**, 361(1930).

$$\times (2\pi)^4\delta^4(p_1' + p_2' - p_1 - p_2) \tag{7.82}$$

其中在直接项与交换项之间的负号起因于 Fermi 统计，它要求振幅在两个末态电子的交换下是反对称的. 正如统计性所要求的，振幅在两个初态电子的交换下也是反对称的. 通过类似的论证，散射到包含两个全同玻色子的态(或从该态散射)的散射振幅，在粒子交换下必须是对称的。我们看到，图 7.11 的粒子偶湮灭过程的振幅 (7.76) 就是这种情况.

当加入交换项后，在 (7.82) 中并没有引进附加的归一化因子，如 $1/\sqrt{2}$ 或 1/2. 从 S_{fi} 构成微分截面的规则，不因为在初态和末态中存在全同粒子而改变. 只是我们必须留心：当在末态中出现两个全同粒子时，在积分以求总截面时要将 (7.81) 的因子 1/2 包含在内. 对于初态中的全同粒子并没有特别的因子出现，因为入射流密度没有变. 电子-电子散射给这个规则的正确性提供了一个简单而清楚的例证. (7.82) 中的第二项、或交换项，对于动量转移 $(p_1 - p_1')^2$ 小的向前散射可以忽略. 在这一限制下，散射简化为正确的 Coulomb 振幅、这是一个与统计性无关的结果.

利用通常的方法，可以从 (7.82) 构成非极化电子的微分散射截面的表达式. 在质心系中，它是

$$d\bar{\sigma} = \frac{e^4m^4}{(2\pi)^2E^4(2\beta)}\Bigg\{\frac{1}{4}\Bigg\{\frac{1}{[(p_1' - p_1)^2]^2}$$

$$\times \mathrm{Tr}\left(\frac{\not{p}_1' + m}{2m}\gamma_\mu\frac{\not{p}_1 + m}{2m}\gamma_\nu\right)\mathrm{Tr}\left(\frac{\not{p}_2' + m}{2m}\gamma^\mu\right.$$

$$\left.\times \frac{\not{p}_2 + m}{2m}\gamma^\nu\right) - \frac{1}{(p_1' - p_1)^2(p_2' - p_1)^2}$$

$$\times \mathrm{Tr}\left[\frac{\not{p}_1' + m}{2m}\gamma_\mu\frac{\not{p}_1 + m}{2m}\gamma_\nu\frac{(\not{p}_2' + m)}{2m}\gamma^\mu\right.$$

$$\times \frac{(\not{p}_2 + m)}{2m} \gamma^\nu \Bigg] + (p_1' \longleftrightarrow p_2') \Bigg\}$$

$$\times \delta^4(p_1' + p_2' - p_1 - p_2) d^3p_1' d^3p_2' \tag{7.83}$$

其中 E 是每一个电子的质心系能量，而 β 是它的速度。注意在质心系中两个动态电子的相对速度为 2β. 在相对论性能量下，这接近于光速的两倍. 在这里与狭义相对论并没有矛盾，而且确实，一个电子的速度从另一个电子看来永远不会超过光速. 上面的 $(p_1' \longleftrightarrow p_2')$ 代表从 $d\bar{\sigma}$ 的前两项通过交换 p_1' 与 p_2' 所得到的两个附加项.

(7.83) 中的直接散射与交换散射之间的干涉项仅包含一个非常长的迹. 在图 7.14 中，用闭合迴线来代表矩阵元的平方的图象方法表明了直接项(有两个迴线和两个迹)与干涉项(有一个迴线和一个迹)的区别. 这些图解对于保持指标 μ、ν 以及旋量因子的次序正确，时常是有用的. 线上的圈提醒我们分母中不出现 $(p^2 - m^2)$.

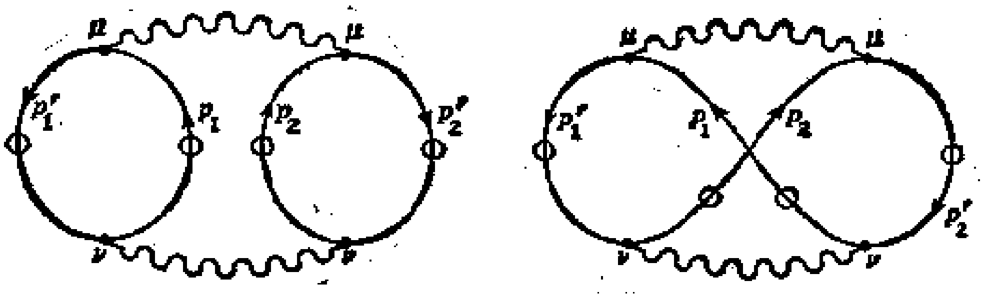


图 7.14 电子-电子散射的矩阵元平方的图解表示. 线上的圈指明不出现因子 $(p^2 - m^2)^{-1}$.

可以通过应用 (7.14) 后面的迹定理来实现 (7.83) 中迹的计算. 特别是，在化简干涉项中的八个 γ 矩阵的迹时，定理 5 是非常有用的. 利用相对论性能量 $E \gg m$ 化简结果，略去与 m^2 成正比的项，我们求得，例如

$$\mathrm{Tr}(\not{p}_1'\gamma_\mu\not{p}_1\gamma_\nu\not{p}_2'\gamma^\mu\not{p}_2\gamma^\nu) = -2\mathrm{Tr}(\not{p}_1'\gamma_\mu\not{p}_1\not{p}_2\gamma^\mu\not{p}_2')$$
$$= -8p_1\cdot p_2\mathrm{Tr}\not{p}_1'\not{p}_2' = -32(p_1\cdot p_2)(p_1'\cdot p_2')$$

用质心系的能量 E 和散射角 ϑ 来表示，微分截面是

$$\left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega}\right)_M = \frac{\alpha^2}{8E^2}\left[\frac{1+\cos^4(\vartheta/2)}{\sin^4(\vartheta/2)} + \frac{2}{\sin^2(\vartheta/2)\cos^2(\vartheta/2)} + \frac{1+\sin^4(\vartheta/2)}{\cos^4(\vartheta/2)}\right] \tag{7.84}$$

其中的第一项和第三项是图 7.13 的两个 Feynman 图的矩阵元的平方，而第二项是干涉的贡献．在得出这一结果时，我们利用了运动学恒等式

$$p_1\cdot p_2 = p_1'\cdot p_2' = 2E^2;\ \ p_1\cdot p_2' = p_1'\cdot p_2 = 2E^2\cos^2(\vartheta/2);$$

和 $$p_1\cdot p_1' = p_2\cdot p_2' = 2E^2\sin^2(\vartheta/2)$$

当 m^2 的项被忽略时，上式是有效的．方程(7.84)是质心系中 Møller 公式[1]的高能极限．

其次，转到电子-正电子散射．我们求助于类似于(7.77)的替换规则，以便从 Møller 公式得到截面．这个过程(称为 Bhabha 散射[2])的 Feynman 图如图 7.15 所示．利用替换

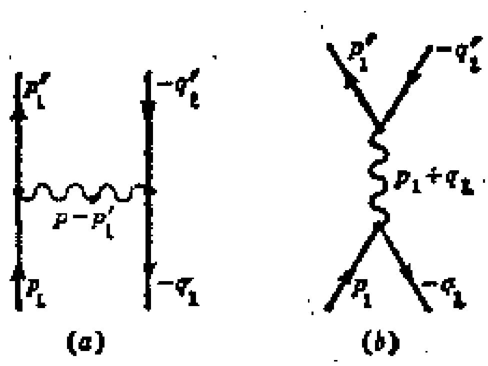


图 7.15 电子-正电子散射

1) C.Møller, *Ann. Phys.*, **14**,531(1932).

2) H.J.Bhabha, *Proc. Roy. Soc.*(*London*), **A154**, 195(1935).

$$
\begin{aligned}
p_1 &\longleftrightarrow p_1 \\
p_1' &\longleftrightarrow p_1' \\
p_2 &\longleftrightarrow -q_1' \\
p_2' &\longleftrightarrow -q_1
\end{aligned} \tag{7.85}
$$

并按照(6.56)改变总体的符号，我们求得 Bhabha 振幅为

$$
\begin{aligned}
S_{fi}^{B} = {} & \frac{e^2 m^2}{V^2} \frac{1}{\sqrt{E_{p_1} E_{p_1'} E_{q_1} E_{q_1'}}} \\
& \times \left[i \frac{\bar{u}(p_1')(-i\gamma_\mu)u(p_1)\bar{v}(q_1)(-i\gamma^\mu)v(q_1')}{(p_1 - p_1')^2} \right. \\
& \left. - i \frac{\bar{u}(p_1')(-i\gamma_\mu)v(q_1')\bar{v}(q_1)(-i\gamma^\mu)u(p_1)}{(p_1 + q_1)^2} \right] \\
& \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1' + q_1' - p_1 - q_1)
\end{aligned} \tag{7.86}
$$

第一项代表电子-正电子直接散射，类似于在电子-电子振幅(7.82)中的第一个散射项．湮灭项相应于(7.82)的第二项或交换散射项． 这两项之间的负号是由于对(7.82)应用了替换规则．(7.82)中在交换两个末态，或两个初态电子之下的反对称性，在(7.86)中变成了一个入射正能电子(p_1)和一个沿时间逆向运动的“入射”负能电子($-q_1'$)之间的反对称性，或出射电子 p_1' 和($-q_1$)之间的反对称性．为了在空穴理论的语言中理解这一反对称性，我们注意到：在相互作用之前的某个时刻，初态包括一个正能量的电子 p_1，加上一个除了在负能态 $-q_1$ 有一空穴外均已被充满的负能海． 特别是，在态 $-q_1'$ 有一个负能电子存在，因而按照 Fermi 统计，初态在交换 $p_1 \longleftrightarrow -q_1'$ 之下必须是反对称的；类似的论证适用于末态．对于海中的所有其他粒子也需要反对称化，但这在(7.86)中并不出现，因此不改变它的形式．

为了得到在质心系中的电子-正电子散射截面，我们把替换规则(7.85)用于(7.83)，并像对于 Møller 散射一样求出迹．

这给出极端相对论性极限为

$$\left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega}\right)_B=\frac{\alpha^2}{8E^2}\left[\frac{1+\cos^4(\vartheta/2)}{\sin^4(\vartheta/2)}-\frac{2\cos^4(\vartheta/2)}{\sin^2(\vartheta/2)}+\frac{(1+\cos^2\vartheta)}{2}\right] \tag{7.87}$$

7.10 电子散射中的极化

作为第三章所发展的自旋投影算符的一个实际应用，我们回到 7.2 节的 Mott 截面并考虑对一个极化电子人射束的计算. 如在第十章中将要讨论的，μ 介子的衰变电子是以其自旋指向反平行于其运动方向而极化的.

以动量 p_i 和自旋 s_i 人射（这里 $s_i\cdot p_i=0$）的电子的 Coulomb 散射，在对末态自旋 $\pm s_f$ 求和后，由下式给出[见方程 (7.11)]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{4Z^2\alpha^2m^2}{|\boldsymbol{q}|^4}\sum_{\pm s_f}|\bar{u}(p_f,s_f)\gamma^0u(p_i,s_i)|^2 \tag{7.88}$$

为了在计算 (7.88) 时利用求迹的技巧，我们利用 (3.19) 和 (3.22) 以引人自旋投影算符:

$$\Sigma(s_i)=\frac{1+\gamma_5\not{s}_i}{2}$$

$$\Sigma(s_i)u(p_i,s_i)=u(p_i,s_i) \tag{7.89}$$

$$\Sigma(s_i)u(p_i,-s_i)=0$$

重复在 (7.13) 和 (7.14) 之间所指出的论述，我们有[1]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{4Z^2\alpha^2m^2}{|\boldsymbol{q}|^4}\sum_{\pm s_f,s_i}\{\bar{u}(p_f\cdot s_f)\gamma_0\Sigma(s_i)u(p_i,s_i)\}\times\{\bar{u}(p_i,s_i)\gamma_0u(p_f,s_f)\}$$

1) 当然，我们可以两次引人 $\Sigma(s)$，一次在矩阵元中，一次在其伴随矩阵元中，但这是不必要的.

$$= \frac{4Z^2\alpha^2m^2}{|\boldsymbol{q}|^4}\mathrm{Tr}\gamma_0\left(\frac{1+\gamma_5 \not{s}_i}{2}\right)\frac{(\not{p}_i+m)}{2m}$$

$$\times \gamma_0\frac{(\not{p}_f+m)}{2m} \tag{7.90}$$

按照 (7.15) 和 (7.18)，含有自旋矢量的附加的迹为零，于是我们再次回到了 Mott 公式 (7.22). 我们的结果一对于极化和非极化的入射束，微分截面相同一仅仅是应用最低阶微扰论的一个特殊结论，一般地是不正确的[1].

为了阐明自旋极化的可观察效应，我们再次考虑一个自旋沿着其运动方向的入射电子，并计算被散射电子的极化与散射角的函数关系. 初态极化矢量 s_i 满足

$$s_i^2 = -1 = (s_i^0)^2 - \boldsymbol{s}_i\cdot\boldsymbol{s}_i \tag{7.91}$$

和 $$\boldsymbol{s}_i\cdot\boldsymbol{p}_i = 0 \quad 或 \quad s_i^0 = \boldsymbol{s}_i\cdot\boldsymbol{\beta}_i$$

其中 $$\boldsymbol{\beta}_i = \frac{\boldsymbol{p}_i}{E_i} \tag{7.92}$$

联合 (7.91) 和 (7.92) 给出

$$|\boldsymbol{s}_i| = \frac{1}{\sqrt{1-(\boldsymbol{\beta}_i\cdot\hat{\boldsymbol{s}}_i)^2}} \tag{7.93}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{s}}_i$ 是沿 $\boldsymbol{s}_i$ 的单位矢量. 对于电子自旋沿着 $\boldsymbol{\beta}_i$ 的极化，用极化 $\boldsymbol{s}_{iR}$ 标记它是右手电子，我们有 $\boldsymbol{\beta}_i\cdot\hat{\boldsymbol{s}}_{iR} = \beta_i$，和

$$|\boldsymbol{s}_{iR}| = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_i^2}} = \frac{E_i}{m_i} \quad s_{iR}^0 = \beta_i|\boldsymbol{s}_{iR}| \tag{7.94}$$

类似地，对于自旋反平行于 $\boldsymbol{\beta}_i$ 的极化，用 $\boldsymbol{s}_{iL} = -\boldsymbol{s}_{iR}$ 标记左手电子，我们有

1) N.F. Mott *and* H.S.W.Massey, "*The Theory of Atomic Collisions*" 2d *ed. chap IX, Oxford University Press, New York*, 1949. L. Wolfenstein, *Ann. Rev., Nucl. Phys.*, **6**,43 (1956). H. A. Tolhoek, *Rev. Mod Phys.*, **28**, 277(1956).

$$\boldsymbol{\beta}_i \cdot \hat{\boldsymbol{s}}_{iL} = -\beta_i$$

和
$$|\boldsymbol{s}_{iL}| = \frac{E_i}{m_i} \quad s_{iL}^0 = -\beta_i |\boldsymbol{s}_{iL}|$$

类似的公式适用于被散射的电子，只是要把各处的指标 i 都换成 f. 右手矢量和左手矢量 $\boldsymbol{s}_{iR} = -\boldsymbol{s}_{iL}$ 构成描述电子极化的一个特别方便的基，我们将经常引用它. 在 (7.89) 中的 $\Sigma(s)$ 的本征态，其中 $s = \pm s_R = \mp s_L$，称为正螺旋性本征态和负螺旋性本征态[1].

被散射电子的极化由

$$p = \frac{N_R - N_L}{N_R + N_L} \tag{7.95}$$

来量度，这里 N_R 标记以正螺旋性(或右手极化)而放出的电子数，N_L 标记以负螺旋性(或左手极化)放出的电子数. 一般说来，N_R、N_L 和 P 是散射能量和角度的函数. 按照 (7.11) 和 (7.95)，右手电子的 Coulomb 散射的极化由下式给出

$$P_R = \frac{|\bar{u}(p_f, s_{fR})\gamma_0 u(p_i, s_{iR})|^2 - |\bar{u}(p_f, s_{fL})\gamma_0 u(p_i, s_{iR})|^2}{|\bar{u}(p_f, s_{fR})\gamma_0 u(p_i, s_{iR})|^2 + |\bar{u}(p_f, s_{fL})\gamma_0 u(p_i, s_{iR})|^2}$$

$$= \frac{\left\{\mathrm{Tr}\left[\gamma_0 \frac{(1+\gamma_5 \not{s}_{iR})}{2} \frac{(\not{p}_i + m)}{2m} \gamma_0 \frac{(1+\gamma_5 \not{s}_{fR})}{2} \frac{(\not{p}_f + m)}{2m}\right] - \mathrm{Tr}\left[\gamma_0 \frac{(1+\gamma_5 \not{s}_{iR})}{2} \frac{(\not{p}_i + m)}{2m} \gamma_0 \frac{(1-\gamma_5 \not{s}_{fR})}{2} \frac{(\not{p}_f + m)}{2m}\right]\right\}}{\mathrm{Tr}\left[\gamma_0 \frac{(1+\gamma_5 \not{s}_{iR})}{2} \frac{(\not{p}_i + m)}{2m} \gamma_0 \frac{(\not{p}_f + m)}{2m}\right]}$$

$$= \frac{\mathrm{Tr}\left[\gamma_0 \gamma_5 \not{s}_{iR} \frac{(\not{p}_i + m)}{2m} \gamma_0 \gamma_5 \not{s}_{fR} \frac{(\not{p}_f + m)}{2m}\right]}{\mathrm{Tr}\left[\gamma_0 \frac{(\not{p}_i + m)}{2m} \gamma_0 \frac{(\not{p}_f + m)}{2m}\right]} \tag{7.96}$$

1) M. Jacob and G. C. Wick, *Ann. Phys.* (N.Y.), **7**, 404(1959).

附于 P_R 的下标标记着入射束的极化是完全右手的. 如同在(7.90) 中一样,所有 s_{iR} 或 s_{fR} 的线性项都是零. (7.96) 中分母的迹已在 (7.21) 中算出,而分子则通过把两个 γ_5矩阵作反对易调动到一起并应用(7.17)而得到简化. 经过一个短的计算并代入 (7.94) 之后,结果是

$$P_R = 1 - \left[\frac{2m^2\sin^2(\vartheta/2)}{E^2\cos^2(\vartheta/2) + m^2\sin^2(\vartheta/2)}\right] \qquad (7.97)$$

在相对论性极限 $m/E \to 0$, 或 $\beta \to 1$, 我们求得 $P_R \to 1$, 表明在 Coulomb 散射的高能极限,入射电子没有退极化.

当入射电子束不是沿着其运动方向完全极化而只是部分地极化时,我们预期将把 (7.97) 修改为

$$P = pP_R \qquad (7.98)$$

这里 p 标记入射电子的极化,那就是

$$p = p_R - p_L$$

其中 p_R 是正螺旋性的百分比,而 $p_L = 1 - p_R$ 是负螺旋性的百分比. 为了证明 (7.98), 只需要回到 (7.96) 并注意: 极化的表达式对于初态自旋投影算符是线性的. 因此, 在 (7.96) 中借助于恒等式

$$p_R\frac{1 + \gamma_5\not{s}_{iR}}{2} + p_L\frac{1 - \gamma_5\not{s}_{iR}}{2} = \frac{1 + p\gamma_5\not{s}_{iR}}{2}$$

我们得到期望的结果:

$$P = p\left[1 - \frac{2m^2\sin^2(\vartheta/2)}{E^2\cos^2(\vartheta/2) + m^2\sin^2(\vartheta/2)}\right] \qquad (7.99)$$

(7.99) 的一个特殊情况 $p = 0$ 表明, 初始非极化的电子束在 Coulomb 散射后仍然是非极化的.

作为与这些极化结果相联系的几何图象, 我们定义具有旋量波函数 $u(p, s)$ 的运动电子的自旋与一个任意方向(沿单位矢量 $n^\mu = (0, \mathbf{n})$) 之间的夹角 α

$$\cos\alpha \equiv \langle \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\rangle = \frac{u^{+}(p,s)\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}u(p,s)}{u^{+}(p,s)u(p,s)}$$

$$= \sqrt{1-\beta^2}\,\bar{u}(ps)\gamma_5 \not{n} u(p,s) \tag{7.100}$$

其中 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{p}/E$.

再次引入投影算符，并采用迹技巧以计算 (7.100) 的矩阵元,借助于(7.93)，我们求得

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\beta^2}\,\mathrm{Tr}\left(\frac{\not{p}+m}{2m}\right)\left(\frac{1+\gamma_5\not{s}}{2}\right)\gamma_5\not{n}$$

$$= \sqrt{1-\beta^2}\,\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}$$

$$= \sqrt{\frac{1-\beta^2}{1-(\boldsymbol{\beta}\cdot\hat{\boldsymbol{s}})^2}}\,\hat{\boldsymbol{s}}\cdot\boldsymbol{n} \tag{7.101}$$

按照此式,当 $\hat{\boldsymbol{s}}$ 垂直于 $\boldsymbol{\beta}$ 时，$|\cos\alpha| \leqslant \sqrt{1-\beta^2}$，从而对于自旋轴垂直于速度方向的态,(7.100)中给出的自旋期望值当 $\beta\to 1$ 时为零. 另一方面，如果取自旋 $\boldsymbol{s}$ 沿着速度轴,也就是说,对于螺旋性态，

$$\cos\alpha = \hat{\boldsymbol{s}}\cdot\boldsymbol{n} \tag{7.102}$$

从而沿着平行于或反平行于 $\boldsymbol{s}$ 的方向 $\boldsymbol{n}$，自旋投影为 ± 1. 在这种情况下,我们令 $\alpha = \delta$，从而分别有

$$\cos\delta = \pm 1 \tag{7.103}$$

对于一个散射电子束，$\cos\alpha$ 的平均值由下式给出

$$\langle\cos\alpha\rangle = \sum_{\pm s}\omega(s,p)\cos\alpha \tag{7.104}$$

其中 $\omega(s,p)$ 是到具有动量 p 和自旋 s 的给定末态的跃迁几率. (7.104)的求和最为方便地是对两个螺旋性态求和. 对于沿着运动方向的自旋投影，我们从 (7.103)、(7.104) 和 (7.95) 求得

$$\langle\cos\delta\rangle = \omega(s_R,p) - \omega(s_L,p) = P \tag{7.105}$$

也就是说：极化代表了自旋与动量矢量之间夹角的余弦. 对于 $p=1$ 的初始极化电子束的 Coulomb 散射，(7.105) 和 (7.99) 告诉我们，在高能 $E \gg m$ 或小散射角 $\vartheta \ll 1$

$$\langle\delta\rangle \sim \frac{m}{E}\vartheta \tag{7.106}$$

即是，出射电子的自旋与动量矢量之间的夹角是 m/E 乘以散射角[1].

极化计算的相对论性极限，可以通过在极限 $m/E \to 0$ 之下直接化简极化投影算符，而最为简单地得到. 在这个极限下，$\mathbf{s}$ 平行于 $\mathbf{p}$ 的纵向极化电子的自旋投影算符可以进一步化简. 由 (7.93) 和 (7.94)，我们写下

$$s_R^\mu = \frac{1}{m\beta}p^\mu - \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}g^{\mu 0} \to \frac{p^\mu}{m} \quad \text{当}\ \beta \to 1$$

并在这一极限下求得

$$\left(\frac{1\pm\gamma_5 \not{s}_R}{2}\right)\left(\frac{\not{p}+m}{2m}\right) \to \left(\frac{1\pm\gamma_5}{2}\right)\left(\frac{\not{p}+m}{2m}\right)$$

类似地

$$\left(\frac{1\pm\gamma_5 \not{s}_R}{2}\right)\left(\frac{m-\not{p}}{2m}\right) \to \left(\frac{1\mp\gamma_5}{2}\right)\left(\frac{m-\not{p}}{2m}\right) \tag{7.107}$$

因为在截面计算中，自旋投影算符紧挨着能量投影算符，在相对论极限下，可以把 (7.107) 简化. (7.99) 的结果，即对于 $m/E \to 0$ Coulomb 散射电子没有退极化，在这个极限下可以立刻看出来. 一个右手相对论性电子

$$u(p_i, s_i) = \frac{(1+\gamma_5)}{2}u(p_i, s_i)$$

散射成一个左手相对论性电子

---

1) S.M.Berman，私人通信.

$$u(p_f, s_f) = \frac{(1-\gamma_5)}{2} u(p_f, s_f)$$

的矩阵元(其中相互作用 γ^μ) 正比于

$$\bar{u}(p_f, s_f)\gamma_\mu u(p_i, s_i) = \bar{u}(p_f, s_f)\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\gamma_\mu\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)$$

$$\times u(p_i, s_i) = \bar{u}(p_f, s_f)\gamma_\mu\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)$$

$$\times u(p_i, s_i) = 0$$

习　　题

1. 证明按(7.2)和(7.3)归一化的平面波解具有所期望的Lorentz变换性质. 特别是，把 lorentz 变换对箱体积 V 的效应包括在内，以证明 $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ 是标量，$\psi^+(x)\psi(x)$ 是某矢量的时间分量，正如所预期的那样.

2. 相应于图 7.6 和图 7.7 中的两个 Feynman 图，构成在电子和质子之间交换两个光子的散射振幅. 证明在质子质量为无穷大时的静态极限与图 7.2 中电子在 Coulomb 势中散射的二阶 Born 近似的振幅相一致.

3. 构成电子-质子散射中的轫致辐射振幅，并证明其静态极限简化为在 Coulomb 场中的轫致辐射振幅 (7.57). 证明，在这两种情况之间的因子对应，与弹性散射的 (7.5) 和 (7.7) 之间的因子对应是一样的.

4. 导出任意能量的光子的轫致辐射的 Bethe-Heitler 截面. (关于本题及有关过程的讨论，参见 W.Heitler, *"The Quantum Theory of Radiation"* *3d ed. Oxford University Press. London*, 1954).

5. 导出由 Coulomb 场中的入射光子产生电子-正电子偶的 Bethe-Heitler 截面. 证明：这个过程的振幅通过替换规则与轫致辐射振幅 (7.57) 相联系.

6. 从(7.80)计算在各种能量下粒子偶湮灭为两个光子，$e^+ + e^-$

$\to\gamma+\gamma$ 的总截面，并证明你的答案与课文中给出的(7.81)的低能和高能两个极限相一致.

7． 在最低阶 Born 近似之下求出电子-电子散射的微分截面，以实验室能量和散射角表示.

8． 计算光被束缚电子吸收的截面，电子是在具有低原子序数 Z 的原子内，以使 $Z\alpha = Z/137 \ll 1$，且 $E_{束缚} \ll mc^2$. 还假定光的频率满足 $\hbar\omega \gg E_{束缚}$. 作了这些简化假定之后，对于下述两种情况计算微分截面和总截面.

a. 非相对论性的，$E_{束缚} \ll \hbar\omega \ll mc^2$.

b. 极端相对论性的 $\hbar\omega \gg mc^2$

9． 在(7.99)和(7.105)中，已经通过对正与负螺旋性态的贡献相加而算出了自旋极化和. 我们可以同样用任何两个独立的自旋态作为展开的基. 证明最后结果与基的选择无关.

10． 验证 Mott 散射中的极化方程(7.97).

第八章　散射矩阵的高阶修正

8.1　电子-正电子散射的四阶贡献

在前面的例子中所发展的写出 S 矩阵元的规则，可以推广到耦合常数的更高阶，尽管要面临到新的问题．例如，考虑电子-正电子散射的 e^4 贡献．为了构成这样一个振幅，我们画出相应于这个散射过程的、具有四个电磁顶点的、所有可能

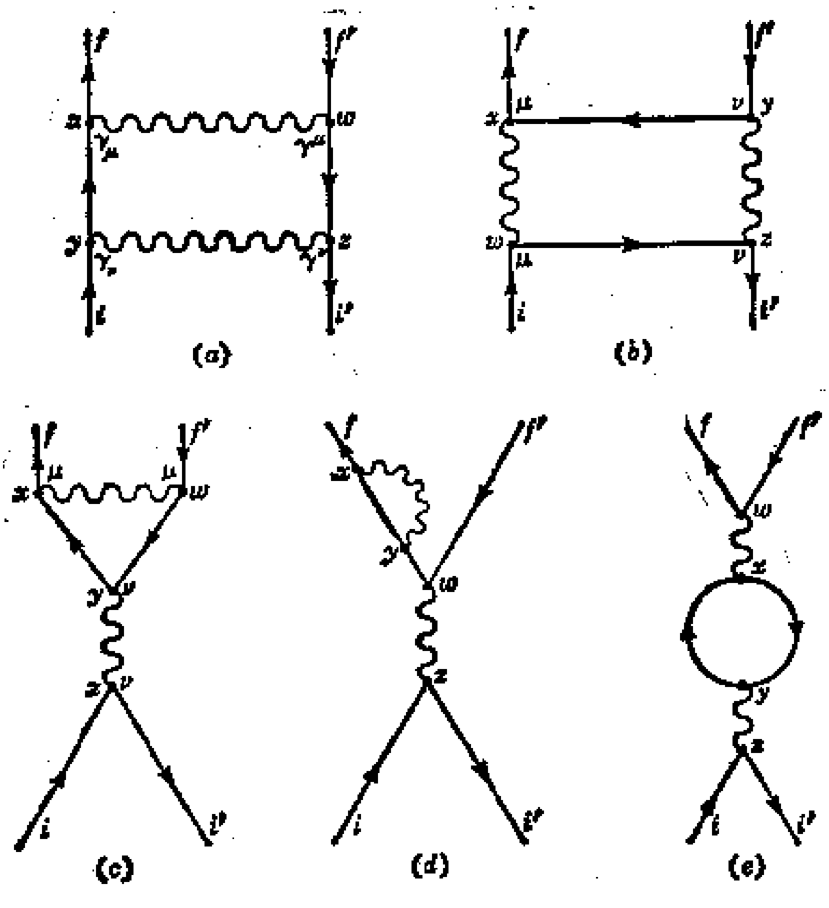


图 8.1　电子-正电子散射的一些四阶图

的 Feynman 图. 然后，遵循由迄今讨论过的例子给出的规则，我们写出所期望的矩阵元.

对于这一计算有贡献的图(总共有 18 个)中的几个，示于图 8.1. 图 (a) 表明在电子与正电子之间的双光子交换，贡献出类似于电子-质子散射的 (7.47) 和 (7.48) 的振幅:

$$S_{fi}^{(4a)} = -(-ie)^4\int d^4w d^4x d^4y d^4z [\bar{\psi}_f^{(+)}(x)\gamma_\mu iS_F(x-y) \\ \times \gamma_\nu\psi_i^{(+)}(y)]iD_F(x-w)iD_F(y-z) \\ \times [\bar{\psi}_{i'}^{(-)}(z)\gamma^\nu iS_F(z-w)\gamma^\mu\psi_{f'}^{(-)}(w)] \tag{8.1}$$

其中 i 和 f, i' 和 f' 分别是电子和正电子的量子数. 图 (b) 是一个湮灭项，相对于 (8.1) 来说它多贡献一个负号

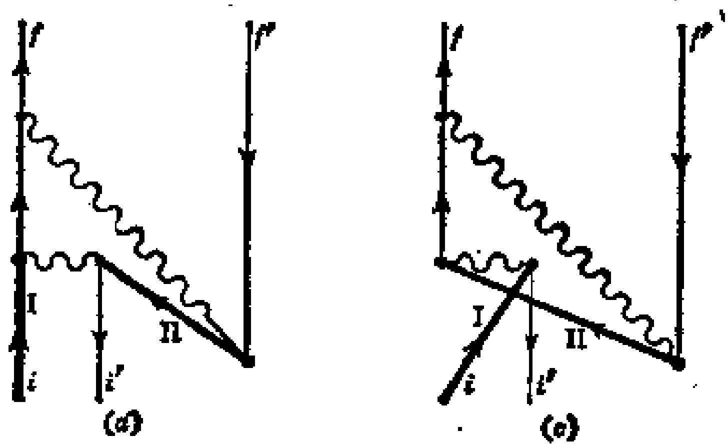


图 8.2 图 (a) 和 (c) 之间由 Fermi 统计引起的相对负号的来源

$$S_{fi}^{(4b)} = +(-ie)^4\int d^4w d^4x d^4y d^4z [\bar{\psi}_f^{(+)}(x)\gamma_\mu iS_F(x-y) \\ \times \gamma_\nu\psi_{f'}^{(-)}(y)]iD_F(x-w)iD_F(y-z) \\ \times [\bar{\psi}_{i'}^{(-)}(z)\gamma^\nu iS_F(z-w)\gamma^\mu\psi_i^{(+)}(w)] \tag{8.2}$$

两个振幅之间相对负号的来源与在低阶计算(7.82)中的来源相同；它来自对于初始正能与负能电子态的波函数的反对称化.

图 (c) 的振幅相应于这样一个过程：由湮灭光子产生的

粒子偶在出射到末态之前先做散射．按照我们现已熟悉的规则：对于每一个顶点写下 $-ie\gamma_\mu$ 和不变体积分 $\int d^4x$；对每一根内线写下一个 Feynman 传播子 $iS_F(x-y)$；对自由的入射和出射粒子写下波函数，这个过程的振幅是

$$S_{fi}^{(c)}=+(-ie)^4\int d^4w d^4x d^4y d^4z iD_F(x-w)iD_F(y-z)$$
$$\times[\bar{\psi}_f^{(+)}(x)\gamma_\mu iS_F(x-y)\gamma_\nu iS_F(y-w)\gamma^\mu\psi_{i'}^{(-)}(w)]$$
$$\times[\bar{\psi}_{f'}^{(-)}(z)\gamma^\nu\psi_i^{(+)}(z)] \tag{8.3}$$

只有(8.3)的总体符号的选择需要注释．它来自 Fermi-Dirac 统计的要求：双电子态在电子交换下必需是反对称的．(*a*) 中四个顶点的一个可能的时序画在图 8.2 中，(*c*) 的相应的图画在一起．这两个 Feynman 图的区别在于标以 I 和 II 的两根电子线互换．(8.1)和(8.2)之间的相对负号保证了总的 S 矩阵元在两个相似 Fermi 子交换之下必要的反对称性．(8.3) 的符号与湮灭图的最低阶贡献[图 7.15*b*，(7.86) 的第二项]符号相同．

如 (*d*) 类型的 Feynman 图也必须包括在内，如果我们把振幅在两个光子互换之下对称化；即是，在图 8.1*c* 中到达顶点 w 和 y 的光子，同样地可能分别发源于 z 或者 x．这就导致对四阶 S 矩阵的如下形式的贡献

$$S_{fi}^{(4d)}=+(-ie)^4\int d^4w d^4x d^4y d^4z iD_F(x-y)iD_F(w-z)$$
$$\times[\bar{\psi}_f^{(+)}(x)\gamma_\mu iS_F(x-y)\gamma^\mu iS_F(y-w)\gamma_\nu\psi_{i'}^{(-)}(w)]$$
$$\times[\bar{\psi}_{f'}^{(-)}(z)\gamma^\nu\psi_i^{(+)}(z)] \tag{8.4}$$

而且具有与(8.3)相同的符号．

图 8.1 的 Feynman 图 (*e*) 的振幅相应于一个过程，在这个过程中，从湮灭光子产生的粒子偶，在出射到末态之前，再次经历湮灭过程．在顶点 y 之上，图 8.1 的 Feynman 图 (*c*) 与

(e) 之间的联系，与图 7.15 的两个二阶的电子-正电子散射过程之间的联系一样；从而我们预期，有如 (7.86)，它们对 S 矩阵的贡献会有相反的符号．这就导致结果：

$$
\begin{aligned}
S_{fi}^{(4e)} = -(-ie)^4 \int & d^4w\, d^4x\, d^4y\, d^4z [\bar{\psi}_f^{(+)}(w)\gamma_\mu \psi_f^{(-)}(w)] \\
& \times iD_F(w-x)[\gamma^\nu_{\alpha\beta} iS_F(y-x)_{\beta\lambda}\gamma^\mu_{\lambda\tau} iS_F(x-y)_{\tau\alpha}] \\
& \times iD_F(y-z)[\bar{\psi}_i^{(-)}(z)\gamma_\nu \psi_i^{(+)}(z)] \qquad (8.5)
\end{aligned}
$$

(8.5) 的总体符号可以通过构成一个（如图 8.2 一样的）适当的时序序列而独立地验明．

就我们现已知道的深度，对称性和反对称性的要求导致如图 8.3 所示的、附加的一类 Feynman 图．这类图是由把图 8.1e 的两个光子对称化而产生的；到达 w 的光子同样地可以发源于 z 或者 x． 所有这样的不连通图，即包含一个完全孤立的部分，而没有始态粒子进入或末态粒子发出的 Feynman 图，在所有的计算中都正常地被略去了．图 8.3 表明一个电子传播到 x，它在该点发射一个光子并逆向散射回到 y，并在 y 将其自己和光子湮没． 在空穴理论的语言中，这是一个涨落效应：一个电子跳出负能海进入一个空的正能态并发射虚光子，然后，在重新吸收这个光子后落回负能海．这样的涨落随时都在发生；为了求出相对于在真空中所发生的过程的散射振幅，我们把所有不连通单元的贡献分出来，这些贡献显然地是给我们感兴趣的连通图提供了一个相乘因子．

我们可以把构成高阶过程的振幅的规则总结如下：

1．画出所有的连通图．

2．给每一个图联系上一个振幅，它在各个顶点具有因子

$$-ie\gamma_\mu \int d^4x$$

3．对于每一根终止于顶点 x 和 y 的、代表费米子或光子

的内线，要包含一个传播子 $iS_F(x-y)$ 或 $iD_F(x-y)$. 对于光子，要插入一个附加因子 $g_{\mu\nu}$，以把由光子线连接起来的两个顶点处的 γ_μ 和 γ_ν 连结在一起.

4. 对于每一根外线，即代表入射或散射粒子的线，引入一个波函数.

这些规则与低阶的例子中所发展的规则一样，附以新的条件是：只需计算连通的图. 最后，我们加上符号条件：

5. 在以交换全同费密子相区别的两项之间，必须有一相对负号，如同在 (7.82) 和图 7.13 中对于两个正能电子的交换

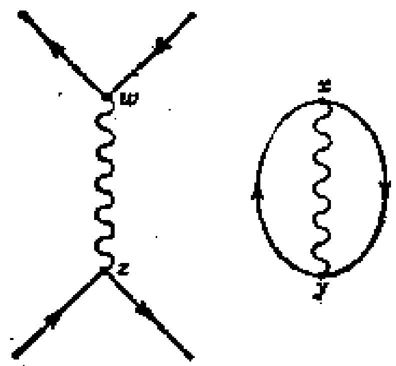


图 8.3 不连通图的一例

以及在 (7.86) 和图 7.15 中对于一个正能电子和一个负能电子的交换一样. 对于图 8.1*e* 的振幅 (8.5)，这就导致对闭合电子迴线引进一个附加的负号. 作为一个普遍规则，在对一个给定的 Feynman 图构成振幅时，对每一个闭合的费密迴线(如在图 8.1*e* 中)要包括一个因子 (−1).

6. 根据 (6.56)，有一个总体因子 $(-1)^{\bar{n}}$，其中 $\bar{n}$ 是出现在初态的正电子数.

剩下的大问题是如何计算积分，特别是对四阶相互作用的积分，并得出与实验比较的数字. 图 8.1 的图 (*a*) 和 (*b*)，与通过交换 x 和 y 而得出的两条十字交叉的光子线一起，提

出了一个困难的 4-维积分，这个积分具有 (7.51) (对电子-质子散射的类似贡献)的类型，这里将不计算这些积分。

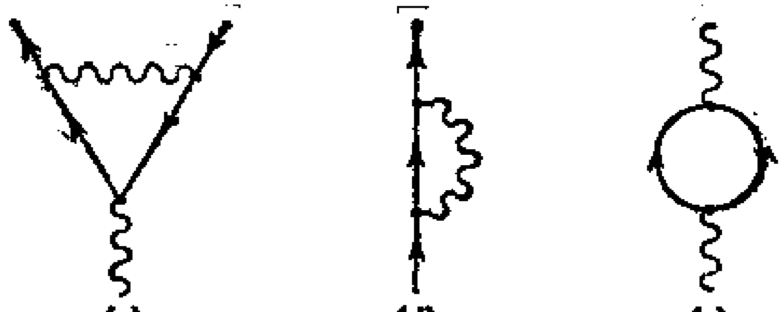


图 8.4 说明 (c) 顶点修正，(d) 电子自质量，和 (e) 真空极化的 Feynman 图

在讨论图 8.1 的图 (c) 至 (e) 时，转换到动量空间，并把它们与类似的最低阶 Feynman 图(图 7.15b，它贡献了 (7.86) 的第二项)联系起来，这样做是方便的. 做出——现已熟悉的——在动量空间的展开式，我们发现 $S_{fi}^{(4c)}$ 与 (7.86) 的第二项的差别在于下列流的替换

$$\bar{u}(p_1')e\gamma_\mu v(q_1') \to \bar{u}(p_1')\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\cdot\frac{(-i)}{k^2+i\epsilon}(-ie\gamma_\nu)$$
$$\times \frac{i}{\not{p}_1' - \not{k} - m + i\epsilon} e\gamma_\mu \frac{i}{-\not{q}_1' - \not{k} - m + i\epsilon}$$
$$\times (-ie\gamma^\nu)v(q_1') \qquad (8.6)$$

$S_{fi}^{(4d)}$ 与 (7.86) 的第二项的差别在于：对于末态电子波函数代入

$$\bar{u}(p_1') \to \bar{u}(p_1')\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{-i}{k^2+i\epsilon}(-ie\gamma_\nu)$$
$$\times \frac{i}{\not{p}_1' - \not{k} - m + i\epsilon}(-ie\gamma^\nu)\frac{i}{\not{p}_1' - m + i\epsilon} \qquad (8.7)$$

而 $S_{fi}^{(\mathrm{e})}$ 与(7.86)的第二项的差别在于：在光子传播子中代入

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1+q_1)^2+i\varepsilon}\to(-1)\left[\frac{(-i)}{(p_1+q_1)^2+i\varepsilon}\right]^2$$

$$\times\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\mathrm{Tr}(-ie\gamma_\mu)\frac{i}{\not{k}-m+i\varepsilon}(-ie\gamma_\nu)$$

$$\times\frac{i}{\not{k}-\not{p}_1-\not{q}_1-m+i\varepsilon}=\frac{(-i)}{(p_1+q_1)^2+i\varepsilon}$$

$$\times I_{\mu\nu}(p_1+q_1)\frac{(-i)}{(p_1+q_1)^2+i\varepsilon} \tag{8.8}$$

在这里有贡献的几部分的 Feynman 图如图 8.4 所示.

所有其余的四阶图都引起与这三种类型相同的嵌入．不幸的是，这些闭合迴线的贡献在 $k\to\infty$ 时是发散的．我们依次讨论和计算它们．

8.2 真空极化

最严重的发散是在 (8.8) 中的发散，它相应于图 8.4e 的闭合电子迴线．我们称这个贡献为二阶光子自能部分．这个积分包含两个电子传播子，从而仅在分母中含有 k 的二次幂，即积分是二次发散的． 这个二次发散可以求助于(如前面所讨论的(7.60)) 规范不变性条件，用某些适当的似真性论证而予以消除．规范变换 $A_\mu(q)\to A_\mu(q)+q_\mu\Lambda(q)$ 不应该改变物理振幅计算的最后结果． 这一要求对于(8.8)有如下的意义．假设图 8.4e 中的光子是真实的物理光子，且按照 Einstein 条件 $q^2=0$，就像在轫致辐射或 Compton 散射过程中所发生的那样．如在图 8.5 中所阐明的，电子迴线对于流过打“?”号的小方格 ($A_\mu(q)$ 与它相互作用)的流，给出一个 e^2 修正．规范(不变性)的要求是 q_μ 乘以流为零，用(8.8)表示，它意味着

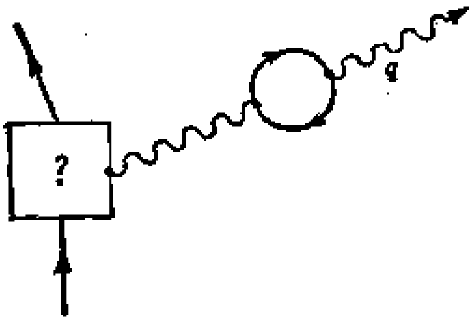


图 8.5 对一个电磁过程的真空极化修正

当 $q^2=0$ 时

$$q^{\mu}I_{\mu\nu}(q)=0 \tag{8.9}$$

这可以重写为

$$\begin{aligned}
q^{\mu}I_{\mu\nu}(q) &= -e^2\mathrm{Tr}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\not{q}\,\frac{1}{\not{k}-m+i\epsilon}\,\gamma_\nu \\
&\quad\times\frac{1}{\not{k}-\not{q}-m+i\epsilon} \\
&= -e^2\mathrm{Tr}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{\not{k}-\not{q}-m+i\epsilon} \\
&\quad\times[(\not{k}-m+i\epsilon)-(\not{k}-\not{q}-m+i\epsilon)] \\
&\quad\times\frac{1}{\not{k}-m+i\epsilon}\,\gamma_\nu \\
&= -e^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{\not{k}-\not{q}-m+i\epsilon}\right. \\
&\quad\left.-\frac{1}{\not{k}-m+i\epsilon}\right)\gamma_\nu
\end{aligned} \tag{8.10}$$

如果积分是有限的，我们可以在第一项中令 $k'=k-q$，从而得到零。 积分不是有限的这个事实是不可避免的，因而(8.10)仍然是含混不清的. 为了继续作下去，我们把(8.8)在

高频切断：作替换[1), 2)]

$$I_{\mu\nu}(q,m^2)\to \bar{I}_{\mu\nu}(q)=I_{\mu\nu}(q,m^2)+\sum_i C_i(M_i^2)$$

$$\times I_{\mu\nu}(q,M_i^2)\equiv\sum_i C_i I_{\mu\nu}(q,m_i^2) \qquad (8.11)$$

式中 M_i^2 是大的质量，而 C_i 是一个使积分收敛的任选常数．这个切断手续并不是唯一的，而且只是为了定义数学而采用的．如果物理观察量依赖于任何切断参数，理论便失败了．在任何情况下，发散量的存在都使人们怀疑在大动量或者（等效地）在小距离下理论上存在着困难．

注意，在 (8.11) 中的切断方法具有保持规范条件 (8.9) 的好处．如果是单个传播子被切断，我们就不能保持规范不变性．

利用恒等式

$$\frac{i}{\not{k}-m+i\varepsilon}=\frac{i(\not{k}+m)}{k^2-m^2+i\varepsilon}=-(\not{k}+m)$$

$$\times\int_0^\infty dz\, e^{iz(k^2-m^2+i\varepsilon)} \qquad (8.12)$$

把传播子的分母表为指数因子，就最容易实现 $\bar{I}_{\mu\nu}(q)$（服从条件 (8.9)）的计算．这给出

$$I_{\mu\nu}(q)=-4(-ie)^2\int_0^\infty dz_1\int_0^\infty dz_2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}$$

$$\times[k_\mu(k-q)_\nu+k_\nu(k-q)_\mu-g_{\mu\nu}$$

$$\times(k^2-k\cdot q-m^2)]\exp\{iz_1\,[k^2-m^2+i\varepsilon]$$

---

1) W. Pauli and F. Villars, *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 434 (1949). 处理这些发散积分的一个不同的手续（它首次导致一个规范不变的结果）由 J. Schwinger 给出，*Phys. Rev.*, **74**, 1439 (1948).

2) R. Feynman, *Phys. Rev.*, **76**, 769 (1949)

$$+iz_2[(k-q)^2-m^2+i\epsilon]\}\tag{8.13}$$

式中迹已经算出而且积分的次序已颠倒了. 通过把积分变数改换为

$$l=k-\frac{qz_2}{z_1+z_2}=k-q+\frac{qz_1}{z_1+z_2}\tag{8.14}$$

而把指数配平方，我们利用恒等式[1]

$$\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}[1,\ l_\mu,\ l_\mu l_\nu]e^{il^2(z_1+z_2)}=\frac{1}{16\pi^2 i(z_1+z_2)^2}$$

$$\times\left[1,\ 0,\ \frac{ig_{\mu\nu}}{2(z_1+z_2)}\right]\tag{8.15}$$

完成动量积分，结果是

$$\bar{I}_{\mu\nu}=-i\sum_i c_i\ \frac{\alpha}{\pi}\int_0^\infty dz_1\int_0^\infty\frac{dz_2}{(z_1+z_2)^2}$$

$$\times\left(\exp\left\{i\left[q^2\frac{z_1z_2}{z_1+z_2}-(m_i^2-i\epsilon)(z_1+z_2)\right]\right\}\right)$$

$$\times\left\{2(g_{\mu\nu}q^2-q_\mu q_\nu)\frac{z_1z_2}{(z_1+z_2)^2}\right.$$

$$\left.+g_{\mu\nu}\left[\frac{-i}{(z_1+z_2)}-\frac{q^2z_1z_2}{(z_1+z_2)^2}+m_i^2\right]\right\}\tag{8.16}$$

正比于 $(g_{\mu\nu}q^2-q_\mu q_\nu)$ 的项自动满足规范条件 (8.9)，然而，正比于 $g_{\mu\nu}$ 的最后三项不满足 (8.9). 但是，我们可以证明这些项为零，也就是

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{dz_1dz_2}{(z_1+z_2)^2}\sum_i c_i\left[m_i^2-\frac{i}{(z_1+z_2)}-\frac{q^2z_1z_2}{(z_1+z_2)^2}\right]$$

---

1) 这些恒等式在直角坐标系中最好算. 每一个积分，在把围道转过 45° 后，就变成一个高斯积分，例如

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dl_0}{2\pi}e^{il_0^2(a+i\epsilon)}=\frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{\pi a}}$$

$$\times \left\{\exp i\left[q^2\frac{z_1 z_2}{z_1+z_2}-(m_i^2-i\epsilon)(z_1+z_2)\right]\right\}$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{dz_1dz_2}{(z_1+z_2)^2}\sum_i c_i\left[m_i^2-\frac{i}{\lambda(z_1+z_2)}\right.$$

$$\left.-\frac{q^2z_1z_2}{(z_1+z_2)^2}\right]\exp\left\{i\lambda\left[q^2\frac{z_1z_2}{z_1+z_2}-(m_i^2-i\epsilon)\right.\right.$$

$$\left.\left.\times(z_1+z_2)\right]\right\}$$

$$=i\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{dz_1dz_2}{\lambda(z_1+z_2)^2}\sum_i c_i$$

$$\times\exp\left\{i\lambda\left[\frac{q^2z_1z_2}{z_1+z_2}-(m_i^2-i\epsilon)(z_1+z_2)\right]\right\}\qquad(8.17)$$

这里，在第二步中我们已经令 $z_i\to\lambda z_i$. 在令被积函数中的 $\lambda z_i\to z_i$ 之后，我们看到积分与 λ 无关；因此 (8.17) 恒等于零。

对 $\bar{I}_{\mu\nu}$ 的其余的贡献也是借助于同样的标度性技巧而算出的. 利用恒等式

$$1=\int_0^\infty\frac{d\lambda}{\lambda}\delta\left(1-\frac{z_1+z_2}{\lambda}\right)\qquad(8.18)$$

$$\bar{I}_{\mu\nu}(q)=\frac{2i\alpha}{\pi}(q_\mu q_\nu-g_{\mu\nu}q^2)\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{d\lambda dz_1dz_2z_1z_2}{\lambda(z_1+z_2)^4}$$

$$\times\delta\left(1-\frac{z_1+z_2}{\lambda}\right)\times\sum_i c_i\exp\left\{i\left[\frac{q^2z_1z_2}{z_1+z_2}\right.\right.$$

$$\left.\left.-(m_i^2-i\epsilon)(z_1+z_2)\right]\right\}$$

$$=\frac{2i\alpha}{\pi}(q_\mu q_\nu-g_{\mu\nu}q^2)\int_0^\infty\int_0^\infty dz_1dz_2z_1z_2$$

$$\times\delta(1-z_1-z_2)\int_0^\infty\frac{d\lambda}{\lambda}\times\sum_i c_i$$

$$\times \exp[i\lambda(q^2 z_1 z_2 - m_i^2 + i\varepsilon)] \tag{8.19}$$

其中我们已再次取了标度 $z_i \to \lambda z_i$.

不幸，对 λ 的积分是对数发散，从而我们借助于切断手续来计算它. 在 (8.11)中，选取 $C_1 = -1$, $C_i = 0(i > 1)$, 我们求得

$$\begin{aligned}\bar{I}_{\mu\nu} &= I_{\mu\nu}(m^2) - I_{\mu\nu}(M^2) \cong \frac{2i\alpha}{\pi}(q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2) \\ &\quad \times \int_0^1 dz z(1-z)\log\frac{M^2}{m^2 - q^2 z(1-z)} \\ &= \frac{i\alpha}{3\pi}(q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2)\left[\log\frac{M^2}{m^2} - 6\int_0^1 dz z(1-z)\right. \\ &\quad \left.\times \log\left(1 - \frac{q^2}{m^2}z(1-z)\right)\right]\end{aligned} \tag{8.20}$$

为了理解 (8.20) 的物理意义，我们如在图 8.1*c* 中一样，考虑闭合迴线对散射的贡献. 把它加到 (7.86) 的二阶振幅上去，按照 (8.8)，给出一个光子传播子，它可以写成两项之和

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{(-i)}{q^2}\bar{I}_{\mu\nu}(q)\frac{(-i)}{q^2} \tag{8.21}$$

代入 (8.20)，并去掉正比于 q_μ 和 q_ν 的项(这些项由于在电子顶点上的流守恒而为零)，我们求得

$$\begin{aligned}&\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\left[1 - \frac{\alpha}{3\pi}\log\frac{M^2}{m^2} + \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 dz z(1-z)\right. \\ &\quad \left.\times \log\left(1 - \frac{q^2 z(1-z)}{m^2 - i\varepsilon}\right)\right]\end{aligned} \tag{8.22}$$

这是包含有 α 一阶修正的光子传播子. 在任何 Feynman 图中，电子迴线对于在两个守恒流之间交换一个光子的振幅的效应都由 (8.22) 给出. 在 $q^2 \to 0$ 的极限下，传播子仅改变一个因子 Z_3，定义为

$$Z_3 \cong 1 - \frac{\alpha}{3\pi} \log \frac{M^2}{m^2} \tag{8.23}$$

因此，例如，小动量转移的 Coulomb 散射振幅变为

$$\frac{ie^2\bar{u}\gamma_0 u}{q^2} \to ie^2 \frac{\bar{u}\gamma_0 u}{q^2}\left(1 - \frac{\alpha}{3\pi}\log\frac{M^2}{m^2}\right) = \frac{ie_R^2\bar{u}\gamma_0 u}{q^2} \tag{8.24}$$

我们得出结论：在 Dirac 方程中出现的参数 e^2 并不是 $4\pi/137$，而是某个更大的数，因为，被测出为 $4\pi/137$ 的是 e_R^2。e_R 称为重正化电荷，而 e 称为裸电荷。在任何交换一个光子的过程中，这个相乘因子都将出现

$$e_R^2 = Z_3 e^2 \cong e^2\left(1 - \frac{\alpha}{3\pi}\log\frac{M^2}{m^2}\right) \tag{8.25}$$

而与动量转移无关。因而，也将有由真空的静态极化产生的、电子电荷的同样的重正化。因此，如果我们用观察电荷 e_R^2 来重新写出截面，计算(到 e^2 阶)中的发散将不出现。可观察的、与动量有关的修正来自(8.22)的第二项，这一项在静态极限 $q^2 \to 0$ 下为零。这一项的贡献是有限的，并且与计算中所采用的切断手续无关。只有裸电荷和物理电荷之间的关系是与切断有关的。在低动量转移 $|q^2/m^2| \ll 1$ 的极限下，它使，例如，Coulomb 散射振幅(8.24)改变一个因子

$$ie^2 \frac{\bar{u}\gamma_0 u}{q^2}\left(1 - \frac{\alpha}{3\pi}\log\frac{M^2}{m^2} - \frac{\alpha}{15\pi}\frac{q^2}{m^2}\right)$$

$$\cong ie_R^2 \frac{\bar{u}\gamma_0 u}{q^2}\left[1 - \frac{\alpha_R}{15\pi}\frac{q^2}{m^2} + O(\alpha_R^2)\right] \tag{8.26}$$

这个改变可以表为在坐标空间中一个如下形式的附加相互作用

$$\left(1 - \frac{\alpha_R}{15\pi m^2}\nabla_x^2\right)\frac{e_R^2}{4\pi r} = \frac{e_R^2}{4\pi r} + \frac{\alpha_R e_R^2}{15\pi m^2}\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}) \tag{8.27}$$

它导致在电荷为Z的类氢原子中能级的一阶改变 ΔE_{nl}

$$\Delta E_{nl} = \frac{-Ze_R^2\alpha_R}{15\pi m^2}|\phi_n l(0)|^2 = -(1/2Z^2\alpha^2 m)\frac{8Z^2\alpha^3}{15\pi n^3}\delta_{l0}$$

(8.28)

对于 $n=2$、$l=0$ 和 $Z=1$

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} = -27 \text{ 兆周/秒}$$

(8.26)和(8.27)贡献的符号就是由第五章的讨论引起我们期望的符号. 对于一个具有低动量转移 $|q^2| \ll m^2$（相应于大的碰撞参数)的电子散射，相互作用与总电荷成正比. 对于具有小碰撞参数和大动量转移 $q^2 = -|\boldsymbol{q}|^2$ 的散射，电子穿过极化云，从而相互作用强度增加. 对 Coulomb 定律所造成的修正，正如 Uehling[1] 在 1935 年首先计算的，正是最初测量氢原子中 $2S_{1/2}-2P_{1/2}$ Lamb 移动分裂的目的. 在 1947 年发现移动并不是 -27 兆周/秒，而是一个 $\sim+1000$ 兆周/秒的移动；如在第四章所讨论的，这主要地归因于辐射场的真空涨落. 对于氢原子中 $n=2$ 能级的 Lamb 移动，近十年中非常准确的测量和计算在 0.2 兆周/秒的范围内相一致，从而以高度的精确性证实了真空极化 -27 兆周/秒的存在. 这既是对于 Dirac 方程的空穴理论(它导致闭合迴线贡献)、也是对于点耦合的简单形式(用以描写电子与光子的相互作用)令人印象深刻的支持. 对于实验来说，仍然需要检验在大的 q^2(相应于在小距离的相互作用)之下的理论，以表明是否需要什么改正. 对于

$$|\boldsymbol{q}|^2 = -q^2 \gg m^2$$

的大动量转移散射，(8.22) 中的修正按对数增加，而直到未重正化电荷 α 的第一阶的光子传播子是

1) E. A. Uehling, *Phys. Rev.*, **48**, 55(1935); R. Serber, *Phys. Rev.*, **48**, 49(1935)

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\left(1+\frac{\alpha}{3\pi}\log\frac{|q|^2}{m^2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{3\pi}\log\frac{M^2}{m^2}\right) \quad (8.29)$$

当动量转移达到切断值 M^2 时，修正补偿了电荷重正化因子，并暗示在无穷大能量的极限下，相互作用由图5.3的裸点电荷的强度来量度．这是一个有趣的然而尚未证实的猜想[1]．

只要虚光子动量 q 是类时的，并且 q^2 超过 4π，如图 8.1e 的粒子偶产生的图那样，则对 (8.22) 中传播子的修正就变成复数，具有一个由下式给出的虚数部分[2]

$$+\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2}\left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)\int_0^1 dz z(1-z)i\pi\vartheta\left[z(1-z)-\frac{m^2}{q^2}\right]$$

$$=+\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2}\frac{i\alpha}{3}\left(1+\frac{2m^2}{q^2}\right)\sqrt{1-\frac{4m^2}{q^2}}\,\vartheta\left(1-\frac{4m^2}{q^2}\right) \quad (8.30)$$

为了理解这个虚数部分的来源，我们从第六章以及从非相对论性传播子理论关于散射的讨论中回忆到：S 矩阵在 Schrödinger 理论中是么正的．么正条件

$$S^+S=1 \quad (8.31)$$

亦即

$$\sum_n S^*_{nf}S_{ni}=\delta_{fi}$$

保证了散射解的几率解释，按照这个解释，对于一个给定的初

---

1) 见5.3节的评论．关于这一解释的动因和含意的广泛的讨论见 L. Landau, A. Abrikosov, *and* I. Khalatn ikov, *Dokl. Akad. Nauk SSR*, **95**, 773 (1954). L. Landau, 见 W. Pauli, V. Weisskopf, *and*. L. Rosenfeld 编 "*Niels Bohr and the Development of Physics*", McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1955. M. Gell-Mann *and* F. Low, *Phys. Rev.*, **95**, 1300(1954). N. N. Bogoliubov, *and* D. V. Shirkov, "*Introduction to the theory of Quantized Fields*", Interscience Publishers, Inc., New York, 1959.

2) R. Feynman, *Phys. Rev.*, **76**, 769 (1949).

态，所有跃迁几率的总和必须为1. 在正电子理论中，粒子被产生和被消灭，因此，对态 n 的求和必须包括一个给定初态所可能散射到的所有的电子、正电子和光子末态. 我们发现，(8.31)，保留了它做为几率守恒一个陈述的解释. 因为(8.31)是 e 的恒等式，S 按相互作用常数的幂级数展开式的每一阶都必须满足(8.31). 如果我们展开

$$S_{fi} = \delta_{fi} + S_{fi}^{(1)} + S_{fi}^{(2)} + \cdots\cdots \tag{8.32}$$

么正条件变为

$$S_{fi}^{(1)} + S_{if}^{(1)*} = 0 \tag{8.33a}$$

$$S_{fi}^{(2)} + S_{if}^{(2)*} = -\sum_n S_{nf}^{(1)*} S_{ni}^{(1)} \tag{8.33b}$$

$$S_{fi}^{(3)} + S_{if}^{(3)*} = -\sum_n [S_{nf}^{(1)*} S_{ni}^{(2)} + S_{nf}^{(2)*} S_{ni}^{(1)}] \tag{8.33c}$$

$$S_{fi}^{(4)} + S_{if}^{(4)*} = -\sum_n [S_{nf}^{(1)*} S_{ni}^{(3)} + S_{nf}^{(2)*} S_{ni}^{(2)} + S_{nf}^{(3)*} S_{ni}^{(1)}] \tag{8.33d}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

对于代表一个自由电子-正电子初态的 i，$S_{fi}^{(1)} = 0$；反应 $e^- + e^+ = 1\gamma$ 为能量-动量守恒所禁戒. (7.86) 满足关系式(8.33b)，(7.86) 正如所要求的是反厄米的. 关系式(8.33d)通过二阶贡献给出了四阶振幅的非零厄米部分. (8.30) 正是代表了这个四阶贡献；它是实的，因此，正如所要求的，它对 S 矩阵(8.5)给出一个厄米贡献. 阈函数 $\vartheta(1-4m^2/q^2)$ 表明：只是对于这样的动量，它除了在闭合电子迴线中的虚粒子偶外，还能够导致实的粒子偶末态[1]，(8.30) 才存在. S 矩阵在任何阶都是么正的证明，可以在场论的框架中更好地完

1) 虚数部分，(8.30)，恰好是使从初态出来的总跃迁几率(到 α^2 阶)为1. 见 R. H. Dalitz, *Proc. Roy. Soc.* (*London*), **A206**, 521(1951).

成[1].

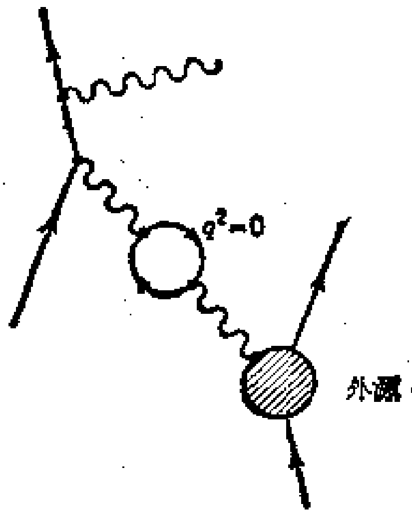


图 8.6 在空间上宏观分开的两个流之间的"实"光子交换

8.3 外光子线的重正化

(8.8)式对虚光子传播子的贡献已经讨论了很多. 闭合电子迴线也将修正外光子线的贡献. 这里,光子可以想象为如图 8.6 那样,是由某些远源产生出来的. 如果把真空极化的圆圈并入到有关的系统中去,则按照 (8.23) 和 (8.24),它对未修正的矩阵元提供一个相乘因子 Z_3. 但是,源的流此时仍然是未重正化的. 如果把一个因子 $\sqrt{Z_3}$ 与源相联系,而把另一个 $\sqrt{Z_3}$ 与有关的系统相联系,则在每一个顶点上的裸电荷将被 $\sqrt{Z_3}e = e_R$ 所代替. 从而,处理实的外线光子的一个实用性规则是: 不管对所有外线的修正,而在每一个顶点上把 e 换成 e_R. 这等价于计算所有的 Feynman 图、在外线上把真空极化圈图包括在内,然后对于每一根外光子线除以

1). 至于证明,见本书下卷《相对论性量子场》,即将出版.

$\sqrt{Z_3}$.

今后我们在写出方程时，将假定已经实现了电荷重正化。$e^2/4\pi$ 标记 1/137，而裸电荷，每当需要时，将用 e_0 标记。

8.4 电子的自质量

图 8.4d 的 Feynman 图的振幅——称为到 e^2 阶的电子的固有自能部分——由 (8.7) 的积分给出，即

$$-i\Sigma(p)=(-ie)^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{(-i)}{k^2-\lambda^2+i\varepsilon}\gamma_\nu$$
$$\times\frac{i}{\not p-\not k-m+i\varepsilon}\gamma^\nu \tag{8.34}$$

方程 (8.34) 发散，因为只是在分母中有 k 的三次幂，其中二次来自光子传播子，一次来自电子传播子。 λ 是一个小的光子质量，是为了防止将会出现的红外发散而加进去的。

引入 (8.12) 并采取到 (8.16) 的类似的步骤，我们达到

$$\Sigma(p)=\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{dz_1\,dz_2}{(z_1+z_2)^2}\left[2m-\frac{\not p z_1}{z_1+z_2}\right]$$
$$\times\exp\left[i\left(\frac{p^2z_1z_2}{z_1+z_2}-m^2z_2-\lambda^2z_1\right)\right] \tag{8.35}$$

(8.35)中的 $\Sigma(p)$ 既适用于在 Feynman 图中具有任意 p^2 和 $\not p$ 的内部电子线，也适用于外部电子线．在后一种情况下，$p^2=m^2$ 且 $\not p$ 接近于自由粒子旋量，如在 (8.7) 中那样．此时，可以利用 Dirac 方程以置 $\not p=m$．如同在真空极化中那样，我们利用 (8.18) 并令 $z_i\to\gamma z_i$，得到

$$\Sigma(p)=\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1dz[2m-\not p(1-z)]\int_0^\infty\frac{d\gamma}{\gamma}$$
$$\times\exp\{i\gamma[p^2z(1-z)-m^2z$$
$$-\lambda^2(1-z)+i\varepsilon]\} \tag{8.36}$$

积分

$$J(p,m,\lambda)=\int_0^\infty \frac{d\gamma}{\gamma}\exp\{i\gamma[p^2z(1-z)-m^2z-\lambda^2(1-z)+i\varepsilon]\}$$

对数发散，我们通过减去 $J(p,m,\Lambda)$ 而把它切断，其中 Λ 是一大的质量。

利用恒等式

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}(e^{iax}-e^{ibx})=\left(\log\frac{b}{a}\right) \tag{8.37}$$

对于切断后的传播子，我们求得

$$\begin{aligned}\Sigma(p)&=\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dz[2m-\not p(1-z)]\\&\quad\times\log\frac{\Lambda^2(1-z)}{m^2z+\lambda^2(1-z)-p^2z(1-z)-i\varepsilon}\\&=\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dz[2m-\not p(1-z)]\log\frac{\Lambda^2(1-z)}{m^2z^2}\\&\quad+\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dz[2m-\not p(1-z)]\\&\quad\times\log\frac{m^2z^2+\lambda^2(1-z)}{m^2z+\lambda^2(1-z)-p^2z(1-z)}\\&\cong\frac{3\alpha m}{4\pi}\log\frac{\Lambda^2}{m^2}-\frac{\alpha}{4\pi}(\not p-m)\log\frac{\Lambda^2}{m^2}\\&\quad+\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dz[2m-\not p(1-z)]\\&\quad\times\log\frac{m^2z^2+\lambda^2(1-z)}{m^2z+\lambda^2(1-z)-p^2z(1-z)}\end{aligned} \tag{8.38}$$

仅头两项与切断有关，这两项将通过重正化程序予以处理[1]。

1) (8.38) 中分出的有限项可以通过要求它(对于电子在质壳 $p^2=m^2$ 上时)恒等于零而唯一地确定。

对于 $p^2-m^2\gg m\lambda$，积分容易算出；我们得到

$$\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dz[2m-\not p(1-z)]\log\frac{m^2z}{m^2-p^2(1-z)}$$

$$=\frac{\alpha m}{\pi}\left(\frac{m^2-p^2}{p^2}\right)\log\frac{m^2-p^2}{m^2}-\frac{\alpha}{4\pi}\not p\left(\frac{m^2-p^2}{p^2}\right)$$

$$\times\left[1+\left(\frac{m^2+p^2}{p^2}\right)\log\frac{m^2-p^2}{m^2}\right] \tag{8.39}$$

在"质壳"附近，也就是说，当 $p^2\approx m^2$（但 $p^2-m^2\gg m\lambda$），且当 Σ 接近于自由粒子旋量（$\not p=m$）时，

$$\Sigma(p)\cong\frac{3\alpha}{4\pi}m\log\frac{\Lambda^2}{m^2}-\frac{\alpha}{4\pi}(\not p-m)$$

$$\times\left(\log\frac{\Lambda^2}{m^2}+4\log\frac{m^2-p^2}{m}\right) \tag{8.40}$$

注意当 $p^2\to m^2$ 时的对数性奇点．对于 $p^2>m^2$，Σ 变为复数，相应于存在有虚电子衰变为电子和光子的过程，类似于光子传播子所曾发生的情况．对于 $p^2-m^2\ll m\lambda$，(8.40) 中最后的对数被 $\log(\lambda/m)$ 所代替．这可以通过在极限 $p^2\to m^2$ 下直接计算[1]积分 (8.38) 而得到验证．

8.5 电子传播子的重正化

到此为止，电子传播子的修正一直是按照 (8.34) 的替换

$$\frac{i}{\not p-m}\to\frac{i}{\not p-m}+\frac{i}{\not p-m}(-i\Sigma(p))\frac{i}{\not p-m}$$

$$=\frac{i}{\not p-m-\Sigma(p)}+O(\alpha^2) \tag{8.41}$$

---

1) 对于电子自能部分的全部的二阶贡献，见 R. Karplus *and* N. M. Kroll, *Phys. Rev.*, **77**, 536 (1950). 又见 J.M. Jauch *and* F. Rohrlich "*The Theory of Photons and Electrons*" *Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass.*, 1955.

从 (8.40)，我们写出

$$\Sigma(p) = \delta m - [Z_2^{-1} - 1 + C(p)](\not p - m) \quad (8.42)$$

其中

$$\delta m = \frac{3\alpha m}{4\pi} \log \frac{\Lambda^2}{m^2}$$

和

$$Z_2^{-1} - 1 + C(p) \cong \frac{\alpha}{4\pi}\left(\log \frac{\Lambda^2}{m^2} + 4\log \frac{m^2 - p^2}{m^2}\right)$$

$$m\lambda \ll p^2 - m^2 \ll m^2$$

$C(p)$ 是这样选择以使在 $\not p = m$ 时，$C(p) = 0$；从而 $C(p)$ 不包含对切断 Λ 的依赖. 在 $\not p = m$，上式变为

$$Z_2^{-1} - 1 = \frac{\alpha}{4\pi}\left(\log \frac{\Lambda^2}{m^2} - 2\log \frac{m^2}{\lambda^2}\right) \quad (8.43)$$

利用 (8.42)，我们现在可以把 (8.41) 重写如下

$$\frac{i}{\not p - m - \Sigma(p)} = \frac{iZ_2}{(\not p - m)[1 + Z_2 C(p)] - Z_2\delta m}$$

$$= \frac{iZ_2}{(\not p - m - \delta m)[1 + C(p)]} + O(\alpha^2)$$

$$(8.44)$$

我们确认 $m_{ph} = m + \delta m$ 为电子的物理质量；在 Dirac 方程中的参数 m，好像裸电荷一样，是另一个不可测量的数. 质量重正化的必要性在经典电动力学中已经出现；对自由电子的实验测量了 m，这是 Lorentz 力定律中的参数加上电子的自作用场[1]的惯性. 对于半径为 a 的一个经典电子，电磁自能 $\sim \alpha/a$ 而观测的质量是 $\sim (m + \alpha/a) = m_{ph}$. 对于一个点电荷，$a \to 0$，从而对质量的修正变为无穷大. 这在 Dirac 理论中也

1) H.A. Lorentz, *"The Theory of Electrons,"* *B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, mbH, Stuttgart*, 1916.

是正确的；但是，在这里它随着切断而对数发散，而与经典的自能修正不同，后者随着电荷半径 $a\to 0$ 而线性地发散．这个发散性的减弱是空穴理论的后果．正如 Weisskopf[1] 首次研

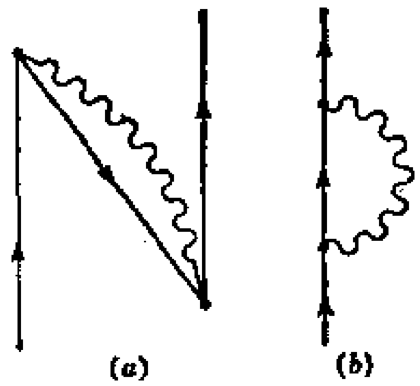


图 8.7　二阶自质量修正的时序

究的，图 8.7a 的编了时序的 Feynman 图中的虚粒子偶抵消了图 8.7b 中的主要发散．

尽管在形式上是无穷大，质量修正对于切断质量 $\Lambda\ll me^{\pi/3\alpha}\sim 10^{100}m$ 是小的．另一方面，宇宙的质量估计是[2] $\sim 10^{80}m$．

实现质量重正化的一个系统的方法是：把 Dirac 方程用物理质量重新写出，并把质量差当作一个附加相互作用项来处理．也就是说，我们写出

$$(i\nabla\!\!\!/ - m_{ph})\psi = eA\!\!\!/\psi + (m - m_{ph})\psi = eA\!\!\!/\psi - \delta m\psi \qquad (8.45)$$

附加相互作用项用图 8.8 的 Feynman 图来代表．这一项刚好把 (8.40) 的第一项抵消，并且在 $p\!\!\!/\to m_{ph}$ 时传播子简化为自由传播子的倍数．

今后我们将假定质量重正化已经实现，也就是说，图 8.8

1) V.F. Weisskopf, *Phys. Rev.*, **56**, 72(1939).

2) C.W. Allen, "*Astrophysical Quantities*," *University of London Press, Ltd., London*, 1955.

的 Feynman 图已包括在内；我们将令 m 标记电子的**物理**质量。

对于传播子的其余修正在于 Z_2 和函数 $C(p)$（这样选择以使在 $p=m$，$C(p)=0$）。于是，对于 $p\cong m$，传播子由下式给出

$$\frac{i}{p-m}\rightarrow\frac{iZ_2}{p-m} \qquad (8.46)$$

也就是说，它以一个相乘因子作了修正。在这个意义上，Z_2 类似于在光子传播子中所遇到的 Z_3。这里，这个因子也可以吸收到在电子线两端的顶点上出现的电荷 e_0 中去；但这是不需要的，因为我们将看到，对顶点的修正将抵消 Z_2。我们不能期望 Z_2 包含着很多的物理，因为按照(8.43)它依赖于光子的质量。

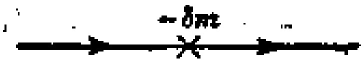


图 8.8 质量重正化抵消项

我们必须小心，不要对外线作两次修正；这里的情况类似于在光子中所遇到的情况。传播子是一个场振幅的双线性表达式，例如，在(6.48)中所看到的。但是，一根外线代表一个场振幅；因此，它以因子 $\sqrt{Z_2}$ 被重正化了。因此，如果所有的对外线做出修正的图解都包括在计算之内，则对于每一根外电子线，结果都必须除以 $\sqrt{Z_2}$。

在非相对论性微扰理论中可以找到这一效应的熟悉的例子，在那里

$$\psi_n=\sqrt{Z_n}\,\varphi_n-\sum_{m\neq n}\frac{(\varphi_m,V\psi_n)}{E_n-E_m^0}\,\varphi_m \qquad (8.47)$$

其中

$$Z_n=1-\sum_{m\neq n}\frac{|(\varphi_m,V\psi_n)|^2}{(E_n-E_m^0)^2} \qquad (8.48)$$

同样，Z 因子实质上是以 Green 函数算出的，而波函数通过 $\sqrt{Z_2}$ 而重正化。

8.6 顶点修正

现在只剩下了图 8.4c 的 Feynman 图，它表明一个光子跨过顶点 γ_μ 引起的修正. 这个贡献称为二阶顶点部分. 为了计算它对物理过程的贡献，我们研究积分

$$
\Lambda_\mu(p',p)=(-ie)^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{(-i)}{k^2-\lambda^2+i\varepsilon}\gamma_\nu \times\frac{i}{\not p'-\not k-m+i\varepsilon}\gamma_\mu\frac{i}{\not p-\not k-m+i\varepsilon}\gamma^\nu \tag{8.49}
$$

其中 p' 标记电子的动量，$-p$ 标记图 8.4c 中虚光子产生的物理正电子的动量. 同样地，(8.49) 也代表由于一个电子对某个外势散射而引起的辐射修正，如图 8.9 所示. 在这个情况下，p' 仍然是末态电子的动量，但 p 现在是初态电子的动量. 这样，同一个函数 (8.49) 描写了对不同物理过程的修正.

振幅 (8.49) 是发散的，因为积分只在分母中包含 k 的四次幂. 此外，我们将遇到一个红外发散，因而我们再次给光子

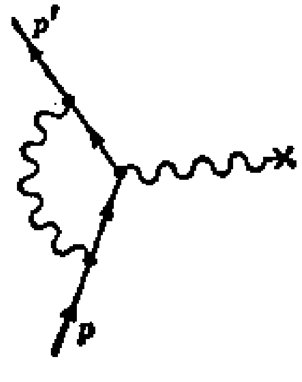


图 8.9　对在外电磁势中散射的顶点修正

指定一个小的质量 λ 以切断非常软的光子的贡献. 通过考虑在

$$q = p' - p \to 0$$

以及在初态和末态电子均为自由电子动量(亦即 $\not p = m$, $\not p' = m$) 情况下的 $\Lambda^\nu(p', p)$, 我们肯定, 无穷大部分已被分离出去.

在这种情况下

$$\bar{u}(p)\Lambda_\mu(p, p)u(p) = (Z_1^{-1} - 1)\bar{u}(p)\gamma_\mu u(p) \quad (8.50)$$

其中 Z_1 是一个常数, 它依赖于质量 $m^2 = p^2$, λ^2, 以及为使其有限所需的切断. 方程 (8.50) 是普遍的, 因为仅有的另外一个 4-矢量 p_ν 置于 (8.50) 的旋量 $\bar{u}(p)$ 与 $u(p)$ 之间时, 与 $m\gamma_\nu$ 是一样的.

没有必要计算 Z_1, 因为直接比较在 $p' = p$ 时的 (8.49) 与 (8.34) 中的传播子 $\Sigma(p)$ 表明

$$\Lambda_\mu(p, p) = -\frac{\partial\Sigma(p)}{\partial p^\mu} \quad (8.51)$$

这里利用了重要的恒等式

$$\frac{\partial}{\partial p^\mu}\frac{1}{\not p - m} = -\frac{1}{\not p - m}\gamma_\mu\frac{1}{\not p - m} \quad (8.52)$$

它断言: 自由传播子对动量的微商等价于在传播线上插入一个零能光子. 从 (8.42) 可以直接算出 $\partial\Sigma(p)/\partial P^\mu$, 于是我们求得

$$\bar{u}(p)\Lambda_\mu(p, p)u(p) = (Z_2^{-1} - 1)\bar{u}(p)\gamma_\mu u(p) \quad (8.53)$$

或者由 (8.50)

$$Z_1 = Z_2 \quad (8.54)$$

到 e^2 阶.

到这一阶的顶点修正就是

$$\Lambda_\mu(p', p) = (Z_1^{-1} - 1)\gamma_\mu + \Lambda_\mu^c(p', p) \quad (8.55)$$

所有对切断的依赖性都包含在 Z_1 之内．只要我们保持光子质量 $\lambda > 0$ 以避免红外灾难，$\Lambda_\mu^c(p', p)$ 就是有限的．满足条件

$$\bar{u}(p)\Lambda_\mu^c(p, p)u(p) = 0 \tag{8.56}$$

时，它也是唯一的．

现在我们或者可以认为 Z_1 在顶点处重正化了电荷 e，或者注意到它恰好抵消了外线的波函数重正化因子 $\sqrt{Z_2}$．这一点最容易通过考察一个电子对一个势的正向散射的所有到 e^2 阶的 Feynman 图看出来．这些如图 8.10 所示．

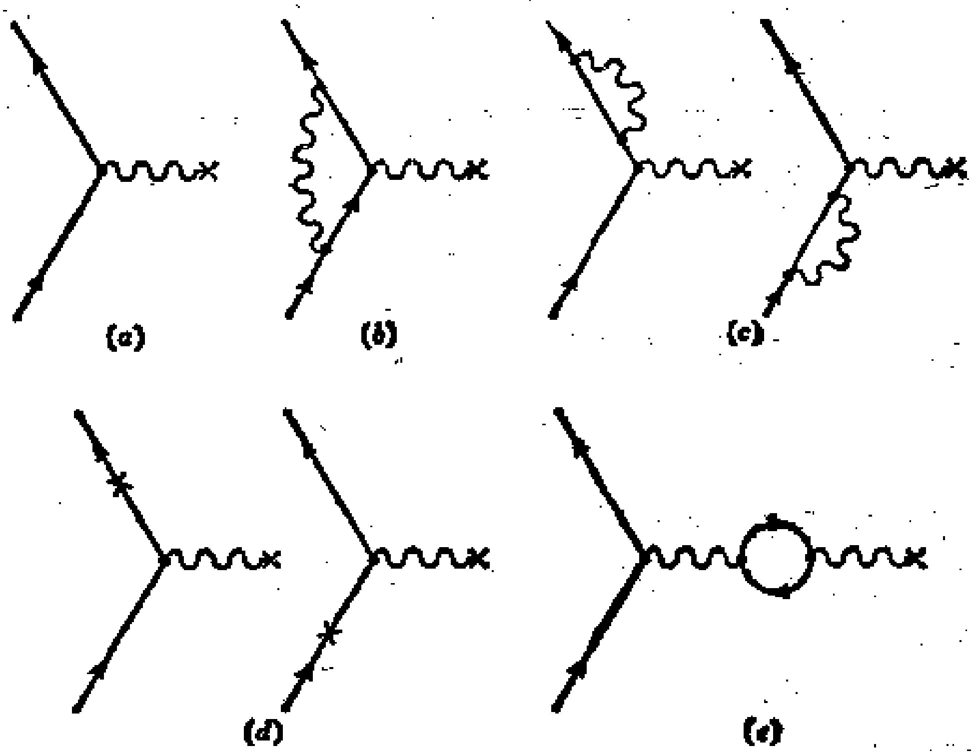


图 8.10　对于在一个外电磁势中散射的二阶辐射修正

下面列出了在极限 $q \to 0$ 下这些图的贡献

(a)　$-ie\gamma_\mu$

(b)　$-ie\gamma_\mu(Z_1^{-1} - 1)$

(c) $\quad +\delta m \dfrac{1}{\not p - m}(-ie\gamma_\mu) - (Z_2^{-1} - 1)(-ie\gamma_\mu) \quad (8.57)$

(d) $\quad -\delta m \dfrac{1}{\not p - m}(-ie\gamma_\mu)$

(e) $\quad -(-ie\gamma_\mu)\dfrac{\alpha}{3\pi}\log\dfrac{\Lambda^2}{m^2} = -ie\gamma_\mu(Z_3 - 1)$

按照我们以前的讨论，对于每一根外电子线我们仍然除以 $\sqrt{Z_2}$，对外光子线除以 $\sqrt{Z_3}$；所有这些贡献之和，到 e^2 阶，是，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{Z_2\sqrt{Z_3}}(-ie\gamma_\mu)[1 + (Z_1^{-1} - 1) - 2(Z_2^{-1} - 1) \\
&\qquad + (Z_3 - 1)] \\
&\approx \frac{1}{Z_2\sqrt{Z_3}}(-ie\gamma_\mu)\frac{[1 + (Z_1^{-1} - 1)][1 + (Z_3 - 1)]}{[1 + (Z_2^{-1} - 1)]^2} \\
&= -ieZ_1^{-1}Z_2\sqrt{Z_3}\gamma_\mu = -ie_R\gamma_\mu \qquad (8.58)
\end{aligned}
$$

其中最后一步利用了 (8.25) 和 (8.54). 在顶点部分和传播子之间，Z_2 重正化完全被消除了. 真空极化完全地决定了电荷重正化.

用以得出 (8.58) 的相当麻烦的记号，被用来着眼于处理更高的阶. 特别是，(8.51) 和 (8.54) 中的关系式 $Z_1 = Z_2$ 对于所有各阶都是对的 (Ward 恒等式)，同样，所有的发散积分都可被吸收到重正化常数 Z_1，Z_2 和 Z_3 中去这个结果也是对的[1].

我们已经在真空极化图的有限部分中发现了一个物理上可观察的效应. 考查顶点和电子自能贡献的有限部分，我们

1) 这一点在本书下卷中做了详细的讨论

也揭示出具有重大物理重要性的预言.

转到顶点 $\Lambda_\mu(p', p)$，为了化简 (8.49) 中的积分，需要做稍微长一些的计算. 我们首先把电子传播子有理化并把分母组合，其做法或者是利用对传播子分母取指数 (8.12) 继之以标度性技巧 (8.18)，或者更直接地，是利用公式[1]．

---

1) 借助于 Feynman 积分 [*Phys. Rev.*, **76**, 679 (1949)] 我们把分母化为二次形式，然后通过移动 k 积分的原点而配成平方，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^4k f(k) \frac{1}{k^2-\lambda^2+i\varepsilon} \frac{1}{(p'-k)^2-m^2+i\varepsilon}$$

$$\times \frac{1}{(p-k)^2+m^2+i\varepsilon}$$

$$= 2\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty dz_1dz_2dz_3\delta(1-z_1-z_2-z_3)$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4kf(k)}{[k^2-2k\cdot p'z_2-2k\cdot pz_3-\lambda^2z_1+(p'^2-m^2)z_2+(p^2-m^2)z_3+i\varepsilon]^3}$$

$$= 2\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty dz_1dz_2dz_3\delta(1-z_1-z_2-z_3)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^4kf(k+p'z_2+pz_3)}{(k^2-c+i\varepsilon)^3}$$

其中

$$\begin{aligned} c \equiv\, & (p'z_2+pz_3)\cdot(p'z_2+pz_3)+\lambda^2z_1-(p'^2-m^2)z_2 \\ & -(p^2-m^2)z_3 \\ =\, & -p'^2z_2(1-z_2)-p^2z_3(1-z_3)+2p\cdot p'z_2z_3 \\ & +m^2(1-z_1)+\lambda^2z_1 \\ =\, & -(p'^2-m^2)z_2(1-z_2)-(p^2-m^2)z_3(1-z_3) \\ & -q^2z_2z_3+m^2(1-z_1)^2+\lambda^2z_1 \end{aligned}$$

现在我们用围道积分方法来完成 $\int d^4k$，以从极点 $\pm\sqrt{|\mathbf{k}|^2+c}$ 移置于 $i\varepsilon$ 的围道来实现积分 $\int_{-\infty}^{\infty} dk_0$，其中极点如下式所指明：$k^2-c+i\varepsilon$ $=(k_0-\sqrt{|\mathbf{k}|^2+c}+i\varepsilon)(k_0+\sqrt{|\mathbf{k}|^2+c}-i\varepsilon)$. 这就给出

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^4k\frac{1}{(k^2-c+i\varepsilon)^3} = \frac{\pi^2}{2ic}$$

分母为任意幂次 ($n>3$) 的结果，是通过对 c 求微商而得到的. 由于分母的对称性(在上面的表达式中它仅是 k^2 的函数)，分子因子也容易化简：k_μ 的奇次幂→0

$$k_\mu k_\nu \to 1/4g_{\mu\nu}k^2 \quad \text{等等}$$

$$\frac{1}{a_1\cdots a_n}=(n-1)!\int_0^\infty\frac{dz_1\cdots dz_n\delta\left(1-\sum_i z_i\right)}{\left(\sum_i a_i z_i\right)^n} \quad (8.59)$$

在进行了四维 k 积分(并对发散积分利用了切断 Λ^2)之后，我们求得

$$\begin{aligned}\Lambda_\mu(p',p)=&\frac{\alpha}{4\pi}\gamma_\mu\left[\log\frac{\Lambda^2}{m^2}+O(1)\right]+\frac{\alpha}{2\pi}\gamma_\mu\\&\times\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty dz_1dz_2dz_3\delta\left(1-\sum_{i=1}^3 z_i\right)\\&\times\log\frac{m^2(1-z_1)^2+\lambda^2z_1}{m^2(1-z_1)^2+\lambda^2z_1-q^2z_2z_3-i\varepsilon}\\&-\frac{\alpha}{4\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty dz_1dz_2dz_3\delta\left(1-\sum_{i=1}^3 z_i\right)\\&\times\frac{\gamma_\nu[\not p'(1-z_2)-\not p z_3+m]\gamma_\mu[\not p(1-z_3)-\not p'z_2+m]\gamma^\nu}{m^2(1-z_1)^2+\lambda^2z_1-q^2z_2z_3-i\varepsilon}\end{aligned} \quad (8.60)$$

到了这一步，通过把 $\not p$ 和 $\not p'$ 做反对易调动到可以作用于电子旋量的那一边(我们不言而喻地假定 Λ_μ 夹在这两个电子旋量之间)就可以方便地把最后一项的分子化简. Gordon 简化公式 (3.26) 在这里帮了忙：最后一项的分子变成

$$\begin{aligned}&-\gamma_\mu[2m^2(1-4z_1+z_1^2)+2q^2(1-z_2)(1-z_3)]\\&\quad-2mz_1z_2[\not q,\gamma_\mu]\end{aligned} \quad (8.61)$$

一般说来，z 的积分是困难的. 尽管已经得到了一个解析结果并在很多地方被引用[1]. 这里我们仅限于讨论两个极

---

1) 见 Feynman, *Phys. Rev.*, **76**, 769 (1949). 对于当电子线不在质壳上且 $p^2\neq m^2$, $p'^2\neq m^2$ 时的顶点，见 Karplus *and* Kroll, 前已引用.

限 $|q|^2 \ll m^2$ 和 $|q|^2 \gg m^2$ 情况．在第一种情况下积分是简易的，并且给出（到 q^2 阶）

$$\gamma_\mu + \Lambda_\mu^c(p',p) \cong \gamma_\mu\left[1 + \frac{\alpha}{3\pi}\frac{q^2}{m^2}\left(\log\frac{m}{\lambda} - \frac{3}{8}\right)\right] + \frac{\alpha}{8\pi m}[q, \gamma_\mu] \tag{8.62}$$

对于 $|q^2| \gg m^2$，我们只得到与 λ 有关的项，并求得

$$\gamma_\mu + \Lambda_\mu^c(p',p) \cong \gamma_\mu\left\{1 - \frac{\alpha}{\pi}\log\frac{m}{\lambda}\left[\log\frac{(-q^2)}{m^2} - 1 + O\left(\frac{m^2}{q^2}\right)\right]\right\} \tag{8.63}$$

把这些结果与来自真空极化 (8.26) 的贡献加起来，给出对于一个电子在外场（它提供一个虚光子 q）中散射的辐射修正（到 α 阶）．从 (8.26) 我们发现，真空极化在低动量转移极限下给 (8.62) 中的 $-3/8$ 加了一个常数 $-1/5$，而对 (8.62) 和 (8.63) 中的红外项或磁矩项没有影响．

(8.62) 的最后一项给电子加上了一个磁矩 $\alpha/2\pi$，因为它把一个电子与外场相互作用的静态极限修正为

$$-ie\bar{u}(p')\left(\gamma_\mu + \frac{i\alpha}{2\pi}\frac{\sigma_{\mu\nu}q^\nu}{2m}\right)u(p)A^\mu(q) = -ie\bar{u}(p')\left[\frac{(p+p')_\mu}{2m} + \left(1+\frac{\alpha}{2\pi}\right)\frac{i\sigma_{\mu\nu}q^\nu}{2m}\right] \times u(p)A^\mu(q) \tag{8.64}$$

对电子磁矩的这一修正因子 $(1+\alpha/2\pi)$ 是 Schwinger[1] 于 1948 年首次导出的，并且后来已在实验上证实[2]．

实验现已准确到足以研究对于磁矩的 α^2 修正．这个修正

1) J. Schwinger, *Phys. Rev.*, **73**, 416L (1948).

2) H.M. Foley *and* P. Kusch, *Phys.Rev.*, **73**, 412L (1948).

已为 Sommerfeld 和 Peterman 算出[1]，他们的结果 $-(\alpha^2/\pi^2)(0.328)$ 与现在的实验最高精度相一致[2]．这结果是通过考虑所有的、包括交换两个虚光子的顶点图而得到的．

(8.62) 和 (8.63) 的其它项会对电子散射的红外发散有贡献．但是，当把软光子的轫致辐射贡献包括在截面之中时，这些发散贡献反而消失．任何实验仪器的分辨率都是有限的；如果以给定的能量分辨率 ΔE 探测电子，观测到的事件数相应于弹性散射截面加上会产生能量在弹性值的 ΔE 之内的电子的轫致辐射截面．

通过比较 (7.64) 和 (8.62) 和 (8.63)，我们来验明，(到 e^2 阶) 这个弹性截面加上非弹性截面之和是有限的，并且摆脱了红外困难．弹性截面到 e^2 阶的红外部分是

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\lambda = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \left[1 - \frac{2\alpha}{\pi} \log \frac{m}{\lambda} \chi(q^2)\right] \tag{8.65}$$

其中

$$\chi(q^2) = \begin{cases} -\dfrac{1}{3}\dfrac{q^2}{m^2} & -\dfrac{q^2}{m^2} \ll 1 \\ \log\dfrac{(-q^2)}{m^2} - 1 & -\dfrac{q^2}{m^2} \gg 1 \end{cases} \tag{8.66}$$

$(d\sigma/d\Omega)_0$ 是对弹性散射截面的最低阶贡献．轫致辐射截面由 (7.64) 给出

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{brem}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \frac{2\alpha}{\pi} \log \frac{k_{\max}}{k_{\min}} \chi(q^2) \tag{8.67}$$

我们不能直接把最后两个方程加起来，因为在两种情况下我们对低频光子的切断是不同的．

---

1) C. Sommerfeld, *Phys. Rev.*, **107**, 328 (1957), 及 *Ann. Phys.* (*N. Y.*), **5**, 20 (1958); A. Peterman, *Helv. Phys. Acta*, **30**, 407 (1957).

2) 最新的实验值已见报导，为 $\mu = 1 + \alpha/2\pi - [0.327 \pm 0.005]\alpha^2/\pi^2$, D. T. Wilkinson *and* H.R. Crane, *Phys. Rev.*, **130**, 852 (1963).

为了解决这个问题，我们有两种选择：或者用具有有限质量的光子来重新推导轫致辐射截面，或者假定发射能量小于 $k_{\min}$ 的光子被抑制而重新计算顶点修正。我们选择后者，以避免由于实纵光子（当 $\lambda=0$ 时是不出现的）带来的纠缠。因为光子切断 $k_{\min}$ 的引进是一个非协变程序，在顶点修正中重正化部分的识别需要非常审慎。这就是为什么这个进展首先以不变光子质量 λ 给出的原因。此外，我们选择 $k_{\min}\gg\lambda$ 以减少数学计算。因此，我们现在必须转到 (8.49) 并通过抑制 $k<k_{\min}$ 的振幅来修正光子传播子。

这意味着在光子传播子 (7.30) 中的 $D_F(x-y,\lambda)$ 从

$$D_F(x-y,\lambda)=i\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3 2|q_0|}e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-i|q_0||x_0-y_0|}$$

$$=-\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{e^{-iq\cdot(x-y)}}{(q^2-\lambda^2+i\varepsilon)} \qquad (8.68)$$

改为

$$D_F(x-y,k_{\min})=i\int_{|\boldsymbol{q}|>k_{\min}}\frac{d^3q}{(2\pi)^3 2|\boldsymbol{q}|}e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-i|\boldsymbol{q}||x_0-y_0|}$$

$$\cong D_F(x-y,\lambda)-i\int_{|\boldsymbol{q}|<k_{\min}}\frac{d^3q}{(2\pi)^3 2|q_0|}$$

$$\times e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-i|q_0||x_0-y_0|}=D_F(x-y,\lambda)$$

$$+\int_{|\boldsymbol{q}|<k_{\min}}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dq_0}{2\pi}e^{-iq\cdot(x-y)}\frac{1}{q^2-\lambda^2+i\varepsilon} \qquad (8.69)$$

其中

$$q_0=\sqrt{\boldsymbol{q}^2+\lambda^2} \qquad k_{\min}\gg\lambda \qquad (8.70)$$

两个传播子被修改的动量空间区域如图 8.11 所示。于是，在顶点 (8.49) 上的改变 $\delta\Lambda_\mu(p',p)$ 是

$$\delta\Lambda_\mu(p',p)=\Lambda_\mu(p',p,\lambda)-\Lambda_\mu(p',p,k_{\min})$$

$$=-ie^2\int_{|\boldsymbol{k}|<k_{\min}}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_0}{(2\pi)}$$

$$\times \frac{\gamma_\nu(p' - k + m)\gamma_\mu(p - k + m)\gamma^\nu}{(k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon)[(p' - k)^2 - m^2 + i\varepsilon] \times [(p - k)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \tag{8.71}$$

这个表达式摆脱了紫外发散，因为积分的范围是受限制的.

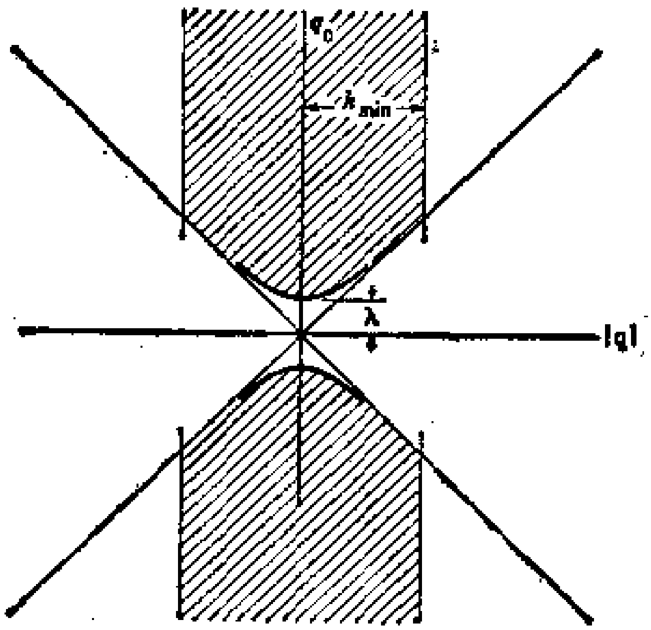


图 8.11 被红外切断修改了的动量空间区域

为了计算 (8.71)，我们通过在 k_0 平面上实行一个围道积分并利用 Cauchy 定理，先做 k_0 积分. 如图 8.12 所示，有三个简单极点被包围在内. 在极限 $k_{min} \ll m$ 之下，$\delta\Lambda_\mu(p', p)$ 中只有来自极点 $k_0 = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + \lambda^2}$ 的留数被保留下来，$\delta\Lambda_\mu(p', p)$ 简化为

$$\delta\Lambda_\mu(p', p) = -e^2 \int_{|\boldsymbol{k}|<k_{min}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\sqrt{\boldsymbol{k}^2 + \lambda^2}} \times \frac{\gamma_\nu(p + m)\gamma_\mu(p + m)\gamma^\nu}{(2k \cdot p)(2k \cdot p')}$$

$$= -e^2\gamma_\mu \int_{|\boldsymbol{k}|<k_{min}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\sqrt{\boldsymbol{k}^2 + \lambda^2}}$$

$$\times \frac{p \cdot p'}{(k \cdot p)(k \cdot p')} \tag{8.72}$$

其中我们预期 $\delta \Lambda_\mu$ 夹在两个自由电子旋量之间.

现在重正化需要审慎，这是由于引进光子切断是一个非协变性运算．因为 (8.51) 仍然有效，我们可以利用我们以前的结论 ($Z_1 = Z_2$)：只要适当地把自能部分包括在内，Λ_μ 就不需要重正化．但是，由于光子传播子的改变，Σ 也改变了；的确

$$\delta\Sigma(p) = \Sigma(p, \lambda) - \Sigma(p, k_{\min})$$

$$= -ie^2 \int_{|\mathbf{k}|<k_{\min}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \gamma_\mu \frac{1}{\not p - \not k - m + i\epsilon}$$

$$\times \gamma^\mu \frac{1}{k^2 - \lambda^2 + i\epsilon} \tag{8.73}$$

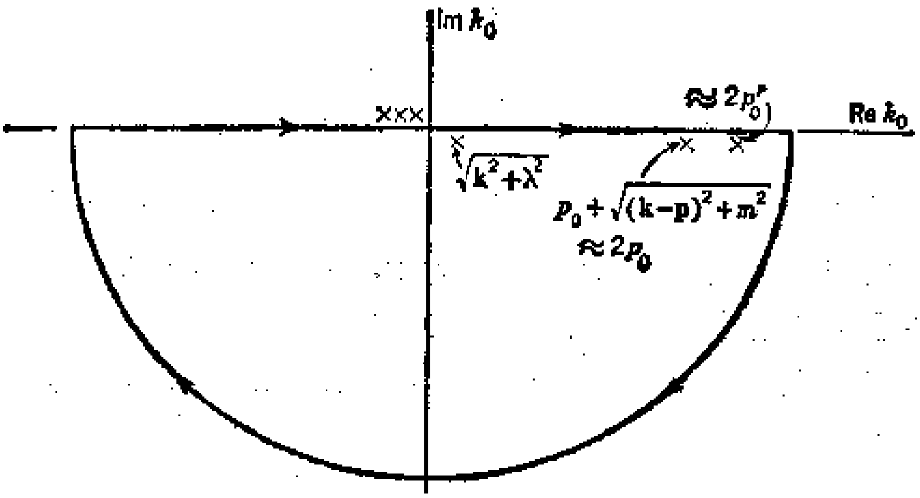


图 8.12　计算 $\delta\Lambda_\mu(p', p)$ 时所遇到的在 k_0 平面上的奇点

上式必须计算到 $p^2 - m^2$ 阶，因为重正化常数 Z_2 的修正是这里所需要的 (δm 是无红外发散的).

如同对顶点一样，我们首先对 k_0 积分，并且得到，直到

p^2-m^2 的第一阶[1]

$$\delta\Sigma(p)=-e^2\int_{|\boldsymbol{k}|<k_{\min}}\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\lambda^2}}$$

$$\times\frac{\gamma_\mu(\not p+m)\gamma^\mu}{\lambda^2-2k\cdot p+(p^2-m^2)}$$

$$=+e^2\int_{|\boldsymbol{k}|<k_{\min}}\frac{d^3k(p^2-m^2)\gamma_\mu(\not p+m)\gamma^\mu}{(2\pi)^3 2\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\lambda^2}(\lambda^2-2k\cdot p)^2}$$

$$+O((p^2-m^2)^2)+O(k_{\min})$$

$$\cong +e^2\int_{|\boldsymbol{k}|<k_{\min}}\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\lambda^2}}\cdot\frac{m^2}{(k\cdot p)^2}$$

$$\times(\not p-m) \tag{8.74}$$

于是，由于光子传播子的修改而引起的顶点的全改变是

$$\delta\Lambda_\mu+\frac{1}{2}\delta\Sigma(p')\frac{1}{\not p'-m}\gamma_\mu+\frac{1}{2}\gamma_\mu\frac{1}{\not p-m}\delta\Sigma(p)$$

$$=-\gamma_\mu e^2\int_{|\boldsymbol{k}|<k_{\min}}\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\lambda^2}}$$

$$\times\left[\frac{p\cdot p'}{(p\cdot k)(p'\cdot k)}-\frac{m^2}{2(p\cdot k)^2}-\frac{m^2}{2(p'\cdot k)^2}\right] \tag{8.75}$$

在上式中，我们必须记住只取图 8.10c 和 d 的自能圆圈的贡献的一半，因为现在是外部波函数要用因子 $\sqrt{Z_2}\cong 1+1/2+(Z_2-1)$ 进行修正.

在非相对论性极限 $|q^2/m^2|\ll 1$ 下计算 (8.75)，给出

$$\delta\Lambda_\mu^c(p',p)=\gamma_\mu\frac{\alpha}{3\pi}\frac{q^2}{m^2}\left(\log\frac{2k_{\min}}{\lambda}-\frac{5}{6}\right) \tag{8.76}$$

从而，由 (8.62) 和 (8.71)

1) $O(k_{\min})$ 项使 δ_m 改变的数值可以忽略.

$$\Lambda_\mu^c(p', p, k_{\min}) = \frac{\alpha}{2\pi}\left[\frac{i\sigma_{\mu\nu}q^\nu}{2m} + \frac{2}{3}\frac{q^2}{m^2}\gamma_\mu \right.$$

$$\left. \times \left(\log \frac{m}{2k_{\min}} + \frac{5}{6} - \frac{3}{8}\right)\right] \qquad (8.77)$$

对于 $|q^2/m^2| \gg 1$，我们求得红外发散项为

$$\delta\Lambda_\mu^c(p', p) = -\gamma_\mu \frac{\alpha}{\pi}\left[\log\left(\frac{-q^2}{m^2}\right) - 1\right]$$

$$\times \left(\log \frac{m}{\lambda} - \log \frac{E}{k_{\min}}\right) \qquad (8.78)$$

最后，由 (8.63) 和 (8.71)

$$\Lambda_\mu^c(p', p, k_{\min}) = -\gamma_\mu \frac{\alpha}{\pi}\log \frac{E}{k_{\min}}\left[\log\left(\frac{-q^2}{m^2}\right) - 1\right] \qquad (8.79)$$

我们看到，通过 $k_{\min}$ 切断，弹性散射的红外部分不是由 (8.65)，而是由下式给出

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{k_{\min}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \left[1 - \frac{2\alpha}{\pi}\log \frac{E}{k_{\min}}\chi(q^2)\right] \qquad (8.80)$$

加上轫致辐射截面 (8.67)，给出散射截面(其中包括发射能量小于 $k_{\max}$ 的光子)的红外部分

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{红外}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \left[1 - \frac{2\alpha}{\pi}\log \frac{E}{k_{\max}}\chi(q^2)\right] \qquad (8.81)$$

上式与 $k_{\min}$ 和 λ 完全无关[1]。

8.7 Lamb 移动

辐射修正 (8.77) 可以看做是由于一个附加的"有效势"引起的，后者作用在电子与光子源之间，这里我们把光子源取作

---

1) J. Schwinger, *Phys. Rev.*, **75**, 651; **76**, 790 (1949). 至于对整个红外问题的新近的评述和讨论，见 D.R. Yennie, S.C. Frautschi, *and* H. Suura, *Ann. Phys.* (*N.Y.*) **13**, 379 (1961).

一个电荷为 Ze 的原子核. 这个附加相互作用所引起的原子能级的改变就是Lamb移动,现在我们能够比第四章中的物理论证更为仔细地来讨论它了.

在动量空间中,电子与一个流源 $eA^{\mu}(q)$ 之间的有效相互作用是由(8.77)加上真空极化贡献(8.26)给出的

$$\bar{u}(p')\left\{\gamma_{\mu}\left[1+\frac{\alpha}{3\pi}\frac{q^2}{m^2}\left(\log\frac{m}{2k_{\min}}+\frac{5}{6}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\right)\right]\right.$$
$$\left.+\frac{i\alpha}{4\pi m}\sigma_{\mu\nu}q^{\nu}\right\}u(P)eA^{\mu}(q) \qquad (8.82)$$

方程(8.82)包含着对电子的流算符 $\bar{u}(p')\gamma_{\mu}u(p)$ 的 α 阶修正,这个修正是动量大于 $k_{\min}$ 的光子引起的,并且它在小的动量转移 $q_{\mu}=p'_{\mu}-p_{\mu}$、亦即 $|q^2/m^2|\ll 1$ 时是有效的. 对于在一个电荷为 Ze 的原子核的 Coulomb 场中的一个电子,流源是 $eA^{\mu}(q)=-(ze^2/|\boldsymbol{q}|^2, 0)$, 于是(8.82)变为

$$-u^{+}(p')\left\{\frac{ze^2}{|\boldsymbol{q}|^2}\left[1-\frac{\alpha}{3\pi}\frac{|\boldsymbol{q}|^2}{m^2}\left(\log\frac{m}{2k_{\min}}+\frac{5}{6}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\right)\right]\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha}{4\pi m}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{q}\right\}u(P) \qquad (8.83)$$

第一项是自旋无关的,并且是如下形式的一个有效相互作用势的 Fourier 变换

$$-\frac{z\alpha}{r}+\frac{4\alpha}{3}\frac{z\alpha}{m^2}\left(\log\frac{m}{2k_{\min}}+\frac{11}{24}-\frac{1}{5}\right)\delta^3(r)$$

在类氢原子中,这个有效相互作用势导致由动量 $>k_{\min}$ 的光子引起的能移,从一阶微扰计算求得它为

$$\Delta E_n^{>}=\frac{4\alpha}{3}\frac{z\alpha}{m^2}|\phi_{nlm}(0)|^2\left(\log\frac{m}{2k_{\min}}+\frac{11}{24}-\frac{1}{5}\right) \qquad (8.84)$$

对这一结果,必须加上来自动量小于 $k_{\min}$ 的软光子的贡献.

我们预期有一个阶为 $k_{\min}\lesssim(Z\alpha)m$ 的自然的切断,也就

是说，对波长比原子大小为大的光子的自然的切断。的确，不能把 $k_{\min}$ 选的任意地小，因为束缚电子的传播子较自由粒子的形式改变了数值 $p^2-m^2\sim(Z\alpha)^2m^2$. 在原子中

$$p^\mu\sim(m+V,\boldsymbol{p})$$

其中 $\quad V\sim(Z\alpha)^2m \quad$ 和 $\quad |\boldsymbol{p}|\sim Z\alpha m$

并且在我们以前对于自能部分 $\Sigma(P)$ 以及顶点 Λ_μ [见(8.74)]的计算中，我们假定了

$$k\cdot p\approx k_{\min}m\gg p^2-m^2\sim(Z\alpha)^2m^2$$

对于动量小于 $k_{\min}$ 的光子，相对论修正应当是小的，也就是说，应当包括 $Z\alpha$ 的更高幂次，因而人们利用了一个完全非相对论性的计算，首先是 Bethe[1] 作出的. 从老式的二阶微扰理论，一个处于 n 态的电子发射而又重新吸收一个光子而引起的能移是

$$\Delta E_n^< = e^2\int_0^{k_{\min}}\frac{d^3k}{2k(2\pi)^3}\sum_{m,\varepsilon}\times\frac{\langle n|\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}|m\rangle\langle m|\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}|n\rangle}{E_n-k-E_m} \tag{8.85}$$

其中求和要遍及横光子极化和所有的电子态. 我们现在这样选择 $k_{\min}$ 使得

$$(Z\alpha)^2m\ll k_{\min}\ll(Z\alpha)m$$

[例如令 $k_{\min}\approx(Z\alpha)^{3/2}m$]，取偶极近似，显然这是有点成问题的. 因为电子态是非相对论性的，$\boldsymbol{\alpha}$ 可用 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{p}/m$ 替换. 于是，对 k 的积分便可作出，得到

$$\Delta E_n^< = \frac{2\alpha}{3\pi}\Bigg[-k_{\min}\langle n|\boldsymbol{v}^2|n\rangle+\sum_m\frac{E_m-E_n}{m^2}$$

1) H. A. Bethe, *Phys. Rev.*, **72**, 339 (1947).

$$\times \log \frac{|E_m - E_n + k_{\min}|}{|E_m - E_n|} |\langle n|\boldsymbol{p}|m\rangle|^2 \Big] \quad (8.86)$$

我们现在必须对这一部分计算实现质量重正化．因为电子的电磁质量 δm 已经包含在它的实验质量之内，在哈密顿量中将会有一个如下形式的质量抵消项

$$\frac{\boldsymbol{p}^2}{2(m-\delta m)} - \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\boldsymbol{p}}{m}\right)^2 \delta m$$

这导致一个能移

$$\delta E_n = 1/2\ \delta m \langle n|\boldsymbol{v}^2|n\rangle$$

它恰好是(8.86)的第一项的结构．因此，它被吸收进质量重正化．因为 $k_{\min} \gg E_n - E_m \sim (Z\alpha)^2 m$，Lamb 移动的非相对论部分由下式给出

$$\begin{aligned}\Delta E_n^{<} &= \frac{2\alpha}{3\pi m^2}\sum_m (E_m - E_n)\log\frac{k_{\min}}{|E_n - E_m|} \\ &\quad \times |\langle n|\boldsymbol{p}|m\rangle|^2 \\ &= \frac{2\alpha}{3\pi m^2}\sum_m (E_m - E_n)\log\frac{k_{\min}}{\bar{E}} \\ &\quad \times |\langle n|\boldsymbol{p}|m\rangle|^2 \end{aligned} \quad (8.87)$$

上式用来定义 $\bar{E}$，予期它为 $\sim (Z\alpha)^2 m$．对态的求和现在可以用一些对易代数来完成

$$\sum_m (E_m - E_n)\langle n|\boldsymbol{p}|m\rangle^2 = 1/2\langle n|[[\boldsymbol{p}, H], \boldsymbol{p}]|n\rangle$$

给出

$$\begin{aligned}\Delta E_n^{<} &= \frac{\alpha}{3\pi m^2}\log\frac{k_{\min}}{\bar{E}}\langle n|\nabla^2 V|n\rangle \\ &= \frac{4\alpha(Z\alpha)}{3m^2}\log\frac{k_{\min}}{\bar{E}}|\phi_{nlm}(0)|^2 \end{aligned} \quad (8.88)$$

加到(8.84)上去，给出到 $\alpha(Z\alpha)^4$ 阶的类氢原子 s 态的能移

$$\Delta E_n^< = \frac{4\alpha(Z\alpha)^4}{3\pi n^2}\left(\log\frac{m}{2\bar{E}} + \frac{11}{24} - \frac{1}{5}\right)m \qquad (8.89)$$

$\bar{E}$ 已经由 Bethe[1] 等人算出，并且求得在氢原子中是 $8.9\alpha^2 m$，与我们的预期相一致．对于 (8.89) 还必须加上 (8.83) 中的反常磁矩的贡献，以使 Lamb 移动直到 $\alpha(Z\alpha)^4$ 阶是完全的．

读者可能会对这一处理(可以理解地)感到不快，特别是关于偶极近似和对 k_{min} 的处理．对于热心的学生，我们推荐 Erickson 和 Yennie[2] 的最近的处理，这一处理避免了划分为软光子和硬光子．

在这一章中我们表明了如何用一个 α 的幂[级数]把书写 S 矩阵元的规则推广到最低阶振幅之外．在这一进展中所遇到的发散困难通过如下的方式被克服了，即证明：无穷大表达式全都可以按确定的方法分离开来，并被包含到一些常数中去，这些常数把电子的电荷和质量、以及描述电子和光子传播的波函数重正化．这样的重正化的必要性在物理基础上是清楚的．对于 Dirac 方程中的质量参数，必须把电磁质量加上去，因为这已经包含在实验质量之中了．同样，电荷必须重正化，以包括真空的静态极化效应．最后，波函数必须重正化，就像 (8.47) 和 (8.48) 所阐明的通常非相对论性微扰论一样，当存在有相互作用引起的涨落时修正一个电子的观察振幅．

由于 Z_1、Z_2、Z_3 和 δm 都发散这一令人遗憾的事实，所以在实现重正化程序时一直要谨慎小心．但是，我们已经看到，留下来的物理效应是有限的，而与我们的切断无关．况且，它

---

1) H.A. Bethe, L.M. Brown, *and* J.R. Stehn, *Phys. Rev.*, **77**, 370(1950). 最近的改进归于 C.L. Schwartz, J.J. Tiemann, *Ann. Phys.* (N.Y.), **6**, 178 (1958).

2) G. Ericksen. 未发表的博士学位论文，*University of Minnesota*, 1959

们与实验一致，例如，在 Lamb 移动和反常磁矩的观察中就是这样[1]。

到了这一步很自然地会发问：当我们推进到 α 的更高阶时将会遇到什么新的问题．回答是除了要求增加计算工作量之外，就什么也不需要了．我们已经引进了所有的需要的重正化．在这一章中所引进的概念和程序足以使我们能以确定的方式对所有的物理振幅[计算 S 矩阵到 α 的任意（有限）阶[2]]得出唯一的、有限的、并且与切断无关的答案。

习　　题

1．检验电子—正电子散射振幅直到 e^4 阶的幺正性．做法是：计算(7.51)的吸收部分，它相应于在其质壳上传播的中间电子和质子；并利用(8.33)证明这个吸收部分等于二阶振幅的适当的乘积．还需证明，从图 7.6 和图 7.7 不会再有其他的吸收部分发生。

2．通过把顶点修正(8.60)的虚数部分与二阶电子—正电子散射振幅和顶点 $e\gamma_\mu$ 的适当的乘积联系起来，检验散射振幅直到 e^3 阶的幺正性。

3．证明：由(8.35)对于切断 $\Lambda(\Lambda\ll m)$ 算出的自质量随着 Λ 线性地增加，并且对于半径为 $a\sim1/\Lambda$ 的电荷分布，它与经典的自能相对应。

4．通过把方程(8.83)中的反常磁矩项加到(8.89)，并计算对于 s 态和 p 态的贡献，完成 Lamb 移动到 $\alpha(Z\alpha)^4$ 阶的计算。

5．构成光子—光子散射振幅到 e^4 阶，并证明它是规范不变和有限的。

6．证明 Furry 定理 [*Phys. Rev.*, **51**, 125 (1937)]，它的陈述

---

1) 关于这一情况的最新评述见 R. P. Feynman *Rept. Solvay Congr. Brussels, Interscience, New York*, 1961；又见 S. D. Drell, *Ann, Phys,* (*N.Y.*), **4**, 75(1958).

2) 这些概念和程序的充分性在本书下卷中作了讨论.

是：发出奇数根光子线的闭合迴线对 S 矩阵没有贡献。由此得出：在外场中光的散射（Delbrück 散射）的最低阶对于场强是二次的。

7. 用清楚的计算验明 $Z_1 = Z_2$（到二阶）。切断光子传播子以保持规范不变性。

8. 证明(8.59)。

9. 验明(8.76)和(8.78)。

10. 在高能动量转移 q（达到 $\alpha\log(q^2/m^2)$ 和 $\alpha\log(E/k_{min})$ 的阶）下，计算电子对 Coulomb 势散射的辐射修正。

第九章 Klein-Gordon 方程

9.1 引言

可以把传播子的形式应用于含有零自旋粒子的过程，并且可以就这类过程发展计算的技术。我们试图用只有一个单独分量的标量波函数 $\varphi(x)$ 来描述这些粒子，结果我们又被引回到自由粒子的 Klein-Gordon 方程

$$(\Box + m^2)\varphi(x) = 0 \tag{9.1}$$

这样一个方程由于不可能定义一个守恒的、正定的几率，在第一章中已经被放弃。但是，摒弃 (9.1) 的这一原始动机现在已经消失，于是我们在 Feynman 的负能态沿时间逆向传播的解释的启发下来重新考查它。粒子的自旋并没有在这个解释中起决定性地作用，我们将发现这一解释既适用于电子，也适用于零自旋粒子。如同在电子的情形中一样，我们将再次碰到这样一个图象：例如，和一个由 Klein-Gordon 方程的正能解描述的 π^+ 介子一起，出现了它的反粒子 π^- 介子，它被解释为一个沿时间逆向传播的负能 π^+ 介子。

让我们先来考虑一下，我们希望对自然界中的哪种粒子应用 Klein-Gordon 方程。没有已知的、稳定的、零自旋的基本粒子；但是，π 介子和 K 介子是接近于稳定的候选者。实验上发现[1]，如在下列反应中，它们是同时被大量地产生和消灭的

1) 例如，见 M. Gell-Mann, A. H. Rosenfeld, *Ann. Rev. Nucl. Sci.*, **7**, 407 (1957)； J. D. Jackson, "*The Physics of Elementary Particles*", *Princeton University Press, Princeton, N. J.*, 1958; W. S.C. Williams (*ed.*), "*An Introduction to Elementary Particles*", *Academic Press Inc., New York*, 1961.

粒子．(p = 质子，n = 中子，Λ° = 中性 Λ 粒子，π^+ = 带正电的 π 介子，等等)

$$\begin{aligned} p + p &\rightarrow p + n + \pi^+ \\ &\rightarrow p + p + \pi^\circ \\ &\rightarrow p + \Lambda^\circ + K^+ \\ \pi^- + p &\rightarrow \Lambda^\circ + K^\circ \\ K^- + p &\rightarrow \Lambda^\circ + \pi^\circ \\ &\rightarrow \Sigma^- + \pi^+ \end{aligned} \tag{9.2}$$

因此，关于这些零自旋介子的波动方程必须考虑到它们可能的产生和湮灭．人们不可能在整个散射过程中始终追随这些粒子的世界线，就像我们讨论与光子相互作用着的电子的世界线时所能做到的那样．如果我们只考虑荷电的 π 介子和K介子与光子的相互作用，这也是对的，因为诸如图9.1 的 Feynman 图有这样的贡献．

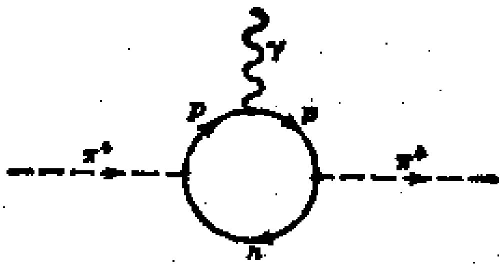


图 9.1 对一个 π 介子电磁结构的贡献

这种已由实验观察所肯定了的、单个零自旋粒子的产生和消灭的可能性，要求关于它们相互作用的理论应当是一个多粒子理论．量子场论的形式最适合于讨论这个问题，然而，如同对于电子和光子一样，我们将再次发现，把我们的传播子方法推广于研究与(增添到(9.1)右边的)源项相耦合的介子，则理解和计算大量现象是可能的．

如果我们把弱相互作用包括进来，零自旋介子也能以如

下类型的方式衰变[1]，($\mu = \mu$ 介子，$\nu =$ 中微子)

$$
\begin{aligned}
\pi^+ &\to \mu^+ + \nu \\
K^+ &\to \pi^+ + \pi^+ + \pi^- \\
&\to \pi^0 + \mu^+ + \nu
\end{aligned}
\tag{9.3}
$$

由于这些弱衰变相互作用(9.3)的量值非常微小，荷电 π 介子和 K 介子有非常长的半衰期 $\tau \sim 10^{-8}$ 秒，它大大超过由 $\hbar$、c 和 π 或 K 介子质量所构成的自然时间单位 $\hbar/mc^2 < 10^{-23}$ 秒。因此，在讨论诸如 (9.2) 的强作用振幅时，甚至在按弱作用常数的幂级数展开式的第一阶，我们可以不管衰变(9.3)及其有限的寿命 $\tau \sim 10^{-8}$ 秒。在这个近似下，π 介子和 K 介子作为稳定粒子来处理，并用初态和末态自由波函数来代表。

在这些讨论中，我们也希望包括 π^0 介子和 K^0 介子，它们具有更短的半衰期，它们的主要衰变方式是[2]

$$
\begin{aligned}
\pi^0 &\to \gamma + \gamma \qquad \tau_{\pi^0} \sim 10^{-16}\ \text{秒} \\
K^0 &\to \pi^+ + \pi^- \quad \tau_{K^0} \sim 10^{-10}\ \text{秒}
\end{aligned}
$$

但是，这些衰变率与特征周期 10^{-23} 秒相比仍然非常长，因而与这些衰变相关联的相互作用只需要把最低阶包括进来。因此，在诸如 (9.2) 的强反应中，π^0 和 K^0 也将作为稳定粒子处理。

除了 (9.2) 和 (9.3) 所阐明的零自旋粒子的相互作用之外，荷电的 π 介子和 K 介子还与光子、与外电磁场相互作用。为了首先强调与 Dirac 电子的电动力学的类似性，我们将把这一章的讨论局限于荷电的零自旋粒子的电磁相互作用。传播子的发展遵循着提供给电子理论的物理线索。为了讨论在外场中介子的低能性质，例如，π-介原子的束缚态，我们也对 Klein-Gordon 方程做出一个系统的非相对论性简化和解释。

---

1) Gell-Mann *and* Rosenfeld, Jackson, 和 Williams, 见前引。

2) Gell-Mann *and* Rosenfeld, Jackson, 和 Williams, 见前引。

更一般的弱衰变和强的核耦合在下一章中讨论。

9.2 Klein-Gordon 粒子的传播子

Klein-Gordon 方程的解满足一个连续性方程，如在(1.12)中所导出的：

$$\frac{\partial j^\mu(x)}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(i\varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} - i\varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\mu}\right) = 0$$

根据散度定理，积分

$$Q = \int d^3x j_0(x) = i\int d^3x \varphi^* \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi \tag{9.4}$$

(其中

$$a\overleftrightarrow{\partial}_0 b = a\left(\frac{\partial b}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)b$$

是一个有用的简写)，对 (9.1) 的解是守恒的。

Klein-Gordon 方程的具有正频率和负频率的平面波解构成一个完全集合. 在体积为 V 的箱中归一化，这些解是

$$f_p^{(\pm)}(x) = \frac{e^{\mp ip\cdot x}}{\sqrt{2\omega_p V}}$$

其中按照 Einstein 条件，$\omega_p = p_0 > 0$，$p^2 = m^2$. 在连续统归一化语言中，对于正频率和负频率解分别写出

$$f_p^{(\pm)}(x) = e^{\mp ip\cdot x}\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_p}} \tag{9.5}$$

它们满足正交和归一化关系

$$\begin{aligned}&\int d^3x f_{p'}^{(\pm)*}(x) i\overleftrightarrow{\partial}_0 f_p^{(\pm)}(x) = \pm\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\\&\int d^3x f_{p'}^{(\pm)*}(x) i\overleftrightarrow{\partial}_0 f_p^{(\mp)}(x) = 0\end{aligned} \tag{9.6}$$

注意，对于正频率解的迭加，Q 是正的，也就是说，对于

$$\varphi^{(+)}(x) = \int d^3p\, a_{+(p)} f_p^{(+)}(x)$$

$$Q = i\int d^3x\varphi^{(+)*}(x)\overleftrightarrow{\partial}_0\varphi^{(+)}(x) = +\int d^3p|_{a+(p)}|^2$$

(9.7)

而对于负频率解的迭加，Q是负的，也就是说，对于

$$\varphi^-(x) = \int d^3pa_-^*(p)f_p^{(-)}(x)$$

$$Q = i\int d^3x\varphi^{(-)*}(x)\overleftrightarrow{\partial}_0\varphi^{(-)}(x) = -\int d^3p|_{a-(p)}|^2 \quad (9.8)$$

这里面包含着对 Klein-Gordon 方程解的几率解释的困难，因为对于一般的平面波解的迭加，Q既可以取正值也可以取负值.

为了构成 Klein-Gordon 方程的 Feynman 传播子，我们需要找到方程

$$(\square_{x'} + m^2)\Delta_F(x'-x) = -\delta^4(x'-x) \quad (9.9)$$

的一个解，它使波的正频率部分沿时间正向传播、而使波的负频率部分沿时间逆向传播. 仿照 Dirac 理论从 (6.40) 到 (6.46) 做下去，我们做 Fourier 变换到动量空间，此时 Δ_F 具有表示

$$\Delta_F(x'-x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot(x'-x)} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (9.10)$$

(9.10) 中加到质量上的小的负虚数部分保证了 (9.10) 满足所希望的边界条件：只使正频率沿时间正向传播，使负频率沿时间逆向传播. 如在第六章中讨论过的，在 (9.10) 中，没有其他的积分围道的选择能够做到这一点.

我们可以验明 (9.10) 就是积分围道的正确的选择，做法是对 dp_0 积分，利用 Cauchy 定理以得到

$$\Delta_F(x'-x) = -i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_p} e^{-i\omega_p|t'-t|} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x})}$$

$$= -i\int d^3p f_p^{(+)}(x')f_p^{(+)*}(x)\vartheta(t'-t)$$

$$-i\int d^3p f_p^{(-)}(x')f_p^{(-)*}(x)\vartheta(t-t') \quad (9.11)$$

通过直接计算，我们从 (9.6) 和 (9.11) 发现，$\Delta_F(x'-x)$ 使由 (9.7) 和 (9.8) 构成的一般波

$$\varphi(x) = \varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x) \quad (9.12)$$

的正频率部分沿时间正向传播，

$$-i\vartheta(t'-t)\varphi^{(+)}(\boldsymbol{x}',t') = \int d^3x\Delta_F(x'-x)i\overleftrightarrow{\partial}_0\varphi^{(+)}(\boldsymbol{x},t) \quad (9.13)$$

而使负频率部分沿时间逆向传播，

$$-i\vartheta(t-t')\varphi^{(-)}(\boldsymbol{x}',t') = -\int d^3x\Delta_F(x'-x)i\overleftrightarrow{\partial}_0\varphi^{(-)}(\boldsymbol{x},t) \quad (9.14)$$

方程 (9.13) 和 (9.14) 类似于 Dirac 方程的 (6.49) 和 (6.50).

9.3 电磁势的引入

一个荷电的零自旋介子与电磁场的相互作用是通过最小替换引入的

$$p^\mu \to p^\mu - eA^\mu(x) \quad (9.15)$$

正如对于 Dirac 方程一样. 我们首先把 $A^\mu(x)$ 看做是一个外加的势. 把 (9.15) 引进 (9.1)，我们得到

$$\left[\left(i\frac{\partial}{\partial x_\mu} - eA^\mu\right)^2 - m^2\right]\phi(x) = 0 \quad (9.16)$$

方程 (9.16) 仍然有一个守恒流，如同在 (1.12)，我们求得它是

$$j^\mu = \phi^*(x)\left[\left(i\frac{\partial}{\partial x_\mu} - eA^\mu(x)\right)\phi(x)\right]$$

$$- \phi(x) \left[\left(i \frac{\partial}{\partial x_\mu} + eA^\mu(x) \right) \phi^*(x) \right] \qquad (9.17)$$

相应的守恒荷是

$$Q = \int d^3x \phi^*(x) [i \overleftrightarrow{\partial}_0 - 2eA^0(x)] \phi(x) \qquad (9.18)$$

代表自由的入射荷电介子的一个平面波将在这个势中散射，其散射振幅由 (9.16) 的解给出。采用 Feynman 边界条件：只有正频率的散射波沿时间正向传播、负频率散射波沿时间逆向传播，我们利用 Feynman 传播子 (9.10) 来积分 (9.16)：

$$(\Box_x + m^2)\phi(\boldsymbol{x},t) = -ie\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} A^\mu + A^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)\phi$$

$$+ e^2 A_\mu A^\mu \phi$$

$$\phi(\boldsymbol{x}, t) = \varphi(\boldsymbol{x}, t) + \int d^4y \Delta_F(x-y) V(y) \phi(y) \qquad (9.19)$$

其中
$$V(y) = ie\left(\frac{\partial}{\partial y^\mu} A^\mu(y) + A^\mu(y) \frac{\partial}{\partial y^\mu}\right)$$

$$- e^2 A_\mu(y) A^\mu(y)$$

方程 (9.19) 与 Dirac 粒子的方程 (6.53) 相类似，而解的物理解释也非常类似于对于电子的解所作的物理解释。为了保证只有代表正能粒子的正频率波在散射之后出射到未来，我们利用了 (9.19) 中的 Feynman 传播子来进行积分。按照 (9.11)，这就导致

$$\phi(\boldsymbol{x}, t) = \varphi(\boldsymbol{x}, t) - i \int d^3p f_p^{(+)}(x) \int d^4y \vartheta(t - y_0)$$

$$\times f_p^{(+)*}(y) V(y) \phi(y) - i \int d^3p f_p^{(-)}(x)$$

$$\times \int d^4y \vartheta(y_0 - t) f_p^{(-)*}(y) V(y) \phi(y) \qquad (9.20)$$

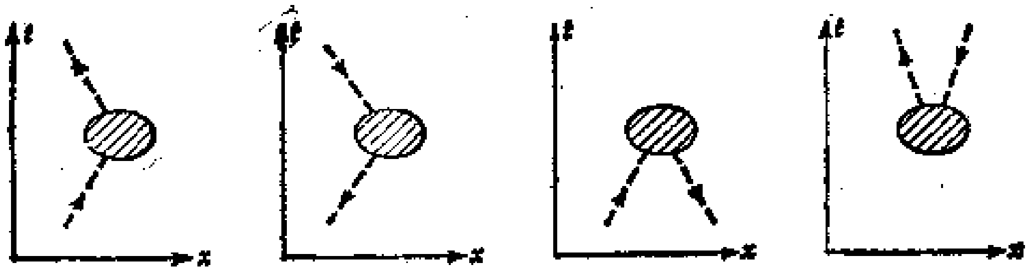


图 9.2 粒子与反粒子散射图以及粒子偶的产生和湮灭图

上式也包含着逆向传播到较早时刻的负频率波. 但是，从守候着其仪器的观察者的观点看来，一个荷电 e 的负能粒子在过去的吸收，等価于一个荷电 $-e$ 的正能粒子的发射. 这样，就把我们引导到基本的、已为实验证明了的预言: 对于自然界中的每一种粒子，都存着一个荷电相反的反粒子.

一个粒子可能没有电荷，在此情况下，它可以等同于它的反粒子. 这种粒子在自然界中业已发现，就是中性的零自旋 π 介子，π^0. 尽管它在(9.15)引人的电磁耦合中没有份，自由 π^0 介子的传播子却可以完全类似于 9.2 节而发展起来. 因为对于 π^0 介子，流和荷 (9.40) 都为零，在没有相互作用的情况下，π^0 将用自由 Klein-Gordon 方程的实数解 $\varphi=\varphi^*$ 所代表. 于是，如同对于荷电介子一样，Feynman 传播子 (9.11) 将使正频率部分沿时间正向传播而使负频率部分逆向传播.

9.4 散射振幅

通过把世界线转动——就像图 9.2 中那样——使得世界线既沿时间正向移动也逆向移动，我们就在我们的介子的散射公式中，除了包括直接散射振幅以外，也包括了粒子-反粒子偶的产生和湮灭的振幅，如同电子的散射公式一样.

为了计算散射或跃迁振幅，我们对 (9.19) 进行迭代，直

到把 ϕ 计算到期望的准确度. (9.19) 中的自由解 φ 代表无散射时归一化的自由粒子波. 跃迁到给定动量(比如说) p'_+ 的粒子态的跃迁振幅，是通过把从相互作用中发射出来的散射波对动量为 p'_+ 的归一化自由波投影而求得的. 然后，跃迁几率由这个振幅的绝对值的平方给出，或者说，由散射波的投影的强度给出.

对于介子的普通散射(图 9.2a)，在散射之后，当 $t\to\infty$ 时，正频率波以这样一个散射振幅发射出来，这个散射振幅是通过投影出散射波 (9.20) 的正频率部分而算出的:

$$S_{p'_+,p_+}=\lim_{t\to\infty}\int d^3x f_{p'_+}^{(+)*} i\overleftrightarrow{\partial}_0\phi(x)$$
$$=\delta^3(\boldsymbol{p}'_+-\boldsymbol{p}_+)-i\int d^4y f_{p'_+}^{(+)*}(y)V(y)\phi(y)\tag{9.21}$$

这里 $\phi(y)$ 由 (9.19) 给出，而 $f_{p+}^{(+)}(y)$ 代表正频率的入射介子波. 于是，跃迁几率是 $|S_{p'_+,p_+}|^2$. 对于粒子偶的产生(图 9.2d)，我们再次像 (9.21) 一样投影出正频率波，但是现在 $\phi(y)$ 代表从 (9.19) 中的入射负频率波 $f_{p-}^{(-)}(y)$ 发展而来的一个散射波. 按照 (9.14)，负频率波在 $y_0\to+\infty$ 时"入射"，因为 $\Delta_F(x-y)$ 只使它沿时间逆向传播. 与第六章中为正电子理论所发展的基础规则完全类似，我们把量子数为 p_- 的负频率解的逆向传播，与具有正能量和 4-动量 p_- 的反介子——比如说，π^- 介子——的出现联系起来.

对于粒子偶的湮灭振幅 (图 9.2c)，我们投影出散射波 (9.20) 在 $t\to-\infty$ 时的负频率部分:

$$S_{p_-,p_+}=-\lim_{t\to-\infty}\int d^3x f_{p_-}^{(-)*}(x)i\overleftrightarrow{\partial}_0\phi(y)\tag{9.22}$$
$$=-i\int d^4y f_{p_-}^{(-)*}(y)V(y)\phi(y)$$

这里 $\phi(y)$ 由 (9.19) 给出，而 $f_{p_+}^{(+)}(y)$ 代表具有 4-动量 p_+ 的正频率入射 π^+ 介子波. 照例，具有正能量和 4-动量 p_- 的入射 π^- 介子，由离开相互作用 $V(y)$ 而向过去传播的负频率波 $f_{p_-}^{(-)*}(y)$ 代表. 最后，π^- (或反)介子散射(图 9.2b) 由 (9.22) 给出，其中 $\phi(y)$ 仍然由 (9.19) 确定. 但是，现在负频率的"入射" π^+ 介子波由 $f_{p_-}^{(-)}(y)$ 给出，它代表在散射**之后**以正能量和 4-动量 p'_- 发射出来的末态 π^- 介子，即是

$$S_{p_-,p'_-} = \delta^3(\boldsymbol{p}_- - \boldsymbol{p}'_-) - i\int d^4y f_{p'_-}^{(-)*}(y)V(y)\phi(y) \quad (9.23)$$

与第六章的正电子理论的传播子公式的比较表明，这里所讨论的 S 矩阵的规则与该章所讨论内容的有着相同的物理来源和解释.

在电磁相互作用下零自旋介子的跃迁几率的实际计算规则，如同在第七章中对于电子所做的那样，可以通过计算几个简单例子而发展起来.

9.5 低阶散射过程

作为第一个例子，我们考虑 π^+ 介子的库仑散射，到 e 的最低阶. 相互作用 (9.19) 中的 $e^2A_\mu A^\mu$ 项对这一阶不作出贡献，从而可以忽略. 与图 9.3 的 Feynman 图相对应的跃迁振幅是令 (9.21) 中的 $\phi(y) \approx f_{p_i}^{(+)}(y)$ 而求得. 对于 $q = p_f - p_i \neq 0$，δ 函数项为零，所以

$$\begin{aligned} S_{p_f,p_i} &= \frac{-ie}{(2\pi)^3}\int d^4y \frac{1}{\sqrt{2\omega_f\cdot 2\omega_i}} e^{iq\cdot y}(p_f+p_i)_\mu A^\mu(y) \\ &= -\frac{ie(p_f+p_i)_\mu}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_f\cdot 2\omega_i}} A^\mu(q) \end{aligned} \quad (9.24)$$

其中 $$A^\mu(q) = \int d^4y e^{iq\cdot y}A^\mu(y)$$

(9.24) 中流的形式使人联想起电子流的 Gordon 分解中的自旋无关项. 以静态 Coulomb 势

$$A^{\mu}(q)=\frac{Ze}{|\boldsymbol{q}|^{2}}2\pi\delta(\omega_{f}-\omega_{i})g^{\mu 0} \tag{9.25}$$

代入 (9.24) 中的 $A^{\mu}(q)$, 通过取平方、对末态求和, 和除以入射流密度这些通常的程序, 我们得到截面. 与 (7.10) 类似, 求得

$$d\sigma=\frac{(2\pi)^{3}}{|\boldsymbol{v}|}d^{3}p_{f}2\pi\delta(\omega_{f}-\omega_{i})\cdot\left[\frac{Ze^{2}(\omega_{f}+\omega_{i})}{(2\pi)^{3}\sqrt{2\omega_{f}\cdot 2\omega_{i}}}\frac{1}{|\boldsymbol{q}|^{2}}\right]^{2} \tag{9.26}$$

和

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{Z^{2}\alpha^{2}}{4p^{2}\beta^{2}\sin^{4}(\vartheta/2)}$$

上式没有在电子情况下于 (7.22) 中出现的、并且与自旋相联系的因子 $1-\beta^{2}\sin^{2}\vartheta/2$.

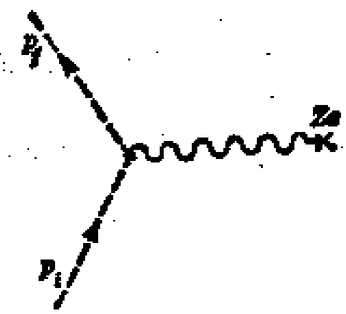


图 9.3 π^{+} 介子的 Coulomb 散射.

对于 π^{-} 介子的散射得到了类似的结果. 从 (9.24), 以 $f_{p_-}^{(-)*}(y)$ 代表在散射前动量为 p_- 的 π^- 介子, 以 $\phi(y)\approx f_{p'_-}^{(-)}(y)$ 代表在散射之后发射出来的末态 π^- 介子, 如图 9.4, 我们求得

$$S_{p_-,p'_-} = +\frac{ie(p_- + p'_-)_\mu A^\mu(q)}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_-\cdot 2\omega'_-}} \tag{9.27}$$

其中 $q = p'_- - p_-$ 仍然代表动量转移．方程(9.24)与(9.27)只相差符号，这与 π^+ 与 π^- 电荷符号的改变相对应，并导致相同的截面(9.26)。

从这一计算中我们所学到的一课是：我们以一个因子 $e(p_\mu + p'_\mu)$ 附于 π 介子顶点，而不是像电子的 $e\gamma_\mu$．波函数归一化因子是 $1/\sqrt{2\omega}$，它代替了电子的 $\sqrt{m/E}$，并且当然没有旋量．

为了得到(9.19)的 V 中的 $e^2A_\mu A^\mu$ 项的规则，我们转到荷电介子的 Compton 散射．在这个例子中，外势包括被吸收和发射的光子，"在连续统归一化中"，分别由两项来描述[见(7.53)]

$$A_\mu(x) = \frac{\varepsilon_\mu(l,\lambda)e^{-il\cdot x}}{\sqrt{2l(2\pi)^3}} + \frac{\varepsilon_\mu(l,\lambda)e^{il\cdot x}}{\sqrt{2l(2\pi)^3}} \tag{9.28}$$

其中 l、λ 指的是动量和极化．因为最低阶的 Compton 振幅正比于 e^2，在 V 中对 e 为线性的项必须迭代一次．于是，与图9.5的 Feynman 图相对应的、到 e^2 阶的 S 矩阵便是

$$\begin{aligned}S_{fi} = (-ie)^2 &\int d^4y d^4z f_{p'}^{(+)*}(y) i\left[\frac{\partial}{\partial y_\mu}A_\mu(y) + A_\mu(y)\frac{\partial}{\partial y_\mu}\right] \\ &\times i\Delta_F(y-z) i\left[\frac{\partial}{\partial z_\nu}A_\nu(z) + A_\nu(z)\frac{\partial}{\partial z_\nu}\right] f_p^{(+)}(z) \\ &+ ie^2\int d^4y f_{p'}^{(+)*}(y)A_\mu(y)A^\mu(y)f_p^{(+)}(y)\end{aligned} \tag{9.29}$$

从(9.28)把 A_μ 代入，并且只保留描述吸收一个 (k,λ) 的光子的

$$\frac{\varepsilon_\mu e^{-ik\cdot x}}{\sqrt{(2\pi)^3 2k}}$$

和描述发射一个(k', λ')的光子的

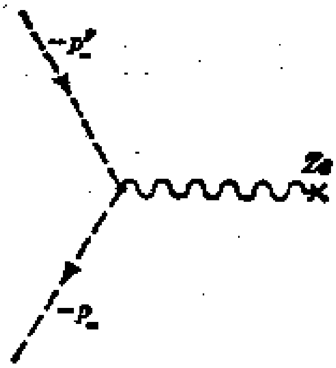


图 9.4 π^- 介子的 Coulomb 散射

$$\frac{\varepsilon'_\mu e^{ik'\cdot x}}{\sqrt{(2\pi)^3 2k'}}$$

二者之间的交叉项，在完成对座标的积分之后，我们求得

$$S_{fi} = \frac{(-ie)^2}{(2\pi)^6\sqrt{2\omega'\cdot 2\omega\cdot 2k'\cdot 2k}}(2\pi)^4\delta^4(p+k-p'-k')$$
$$\times\left[\varepsilon\cdot(2p+k)\frac{i}{(p+k)^2-m^2}\varepsilon'\cdot(2p'+k')\right.$$
$$+\varepsilon\cdot(2p'-k)\frac{i}{(p-k')^2-m^2}\varepsilon'\cdot(2p-k')$$
$$\left.-2i\varepsilon\cdot\varepsilon'\right] \tag{9.30}$$

特别要注意和 $A_\mu A^\mu$ 项一起出现的因子 2。这事的发生是由于，存在着两种途径把被吸收和发射的光子与 $A^\mu(x)$ 的两个



图 9.5 π 介子的 Compton 散射

因子联系起来，而且不易分开．作为对(9.30)的一个有用的验算，我们可以象在第七章中对于电子振幅那样，应用规范不变性检验．从而 S_{fi}，正如容易验明的，在施于初态光子的规范变换

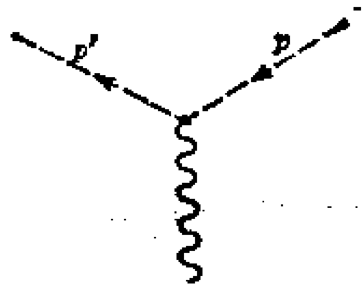


图 9.6 代表相互作用 $e\varphi^*(p'+p)_\mu\varphi A^\mu$ 的顶点图．

$$\varepsilon^\mu \to \varepsilon^\mu + \lambda k^\mu \tag{9.31}$$

之下不变，同样在施于末态光子的规范变换

$$\varepsilon^{\mu'} \to \varepsilon^{\mu'} + \lambda' k'_\mu \tag{9.32}$$

之下也不变．

在(9.30)中选择一个方便的规范

$$\varepsilon \cdot p = \varepsilon' \cdot p = 0$$

上式相应于在实验室参考系中的横极化光子，在这个参考系中介子起初是静止的，$p=(m,0)$．这时，在(9.30)中只剩下了 $A_\mu A^\mu$ 项，因为 $\varepsilon \cdot k = \varepsilon' \cdot k' = 0$．按照现在已经熟悉的方法进一步去求截面：把(9.30)平方，除以 $(2\pi)^4\delta^4(p+k-p'-k')$ 的一次幂，乘以末态相空间因子

$$d^3p'd^3k'$$

再乘以实验室入射流密度的倒数 $(2\pi)^3$，再乘以靶粒子密度的倒数 $(2\pi)^3$，我们求得

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{lab}} = \frac{\alpha^2}{m^2}\frac{(\varepsilon\cdot\varepsilon')^2}{[1+(k/m)(1-\cos\vartheta)]^2}$$

上式在低光子能量 $k\to 0$ 的极限下，简化为经典的 Thomson 极限．对末态光子极化率 ε' 求和，对非极化的入射光子极化率 ε' 求平均，我们得到

$$\left(\frac{\overline{d\sigma}}{d\Omega}\right)_{\text{lab}}=\frac{\alpha^2(1+\cos^2\vartheta)}{2m^2[1+(k/m)(1-\cos\vartheta)]^2}\qquad(9.33)$$

9.6 高阶过程

我们可以继续仿效电子的传播子理论的发展，并从前面的例子中推想出对于更高阶图的计算规则．与电子规则不同的重要改变是：

1．在如图 9.6 所阐明的、把介子从 p_μ 散射到 p'_μ 的顶点上，对于线的任何方向（不论是沿时间的正向还是逆向）我们做替换

$$e\gamma^\mu\to e(p^\mu+p^{\mu\prime})\qquad(9.34)$$

2．(9.19) 中附加的 $A_\mu A^\mu$ 相互作用项贡献一个因子[1]

$$2ie^2g_{\mu\nu}\qquad(9.35)$$

如在振幅 (9.30) 中所阐明的． 因子 i 的出现是由于这一项的展开参数是 e^2． 因此，当我们计算 (9.34) 的贡献到 e^n 阶，就要从 (9.19) 的 n 次迭代而出现因子 $(-i)^n$． 如果在计算中 $A_\mu A^\mu$ 项出现 m 次，就要产生因子 $(-i)^{n-m}(-1)^m=(-i)^{n-2m}(i)^m$；(9.35) 的因子 i 就是这样来的．整个说来，我们必须记住，展开参数是 e 而不是相互作用的阶． 在 (9.35) 中出现了因子 2，因为总是有两种途径把因子 $A_\mu A^\mu$ 与被消灭、被产生、或在顶点被散射(图 9.7)的量子联系起来．规范不变性的验算可以应用于这样的相互作用振幅，它代表所有的、对 e 的任何给定的阶做出贡献的、Feynman 图的总和．

---

1) 这个规则有一个例外，见习题 9.11．

如同从（9.30）到（9.32）一样，这种办法对来自（9.19）的 $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{p}$ 项和 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}$ 项的相对因子，提供了一个非常简单而有用的检验.

3. 对动量为 p 的内线传播子，我们做替换

$$\frac{i}{\not{p}-m+i\varepsilon}=\frac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i\varepsilon}\rightarrow\frac{i}{p^2-m^2+i\varepsilon} \quad (9.36)$$

也就是说，因子 $\not{p}+m\rightarrow 1$.

4. 对于外线的归一化，我们替换电子的旋量

$$\sqrt{\frac{m}{E}}u(p)\rightarrow\frac{1}{\sqrt{2\omega}} \quad (9.37)$$

所有其他的 i 和 2π 因子和电子的情况完全一样. 只有一个相对负号的问题留下来. 对于电子，我们依照 Pauli 原

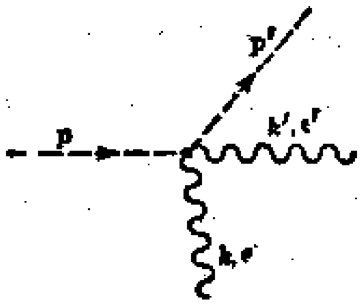


图 9.7 代表相互作用 $e^2A_\mu A^\mu\varphi^*\varphi$ 的图

理，把两个全同粒子的交换反对称化. 另一方面，实验的证据指明，π 介子是玻色子，即，它们满足 Bose-Einstein 的对称统计. 特别是，在反应

$$K^+\rightarrow\pi^++\pi^++\pi^-$$

中，两个 π^+ 介子是以一个相对的 s 态发射的. 此外，在理论上有很强的理由（由 Pauli 最早提出）把自旋与统计性联系起来，而令半整数自旋的粒子服从不相容原理（费密子），整数自旋的粒子像玻色子那样对称化. 这些论证最好在场论的框架

之内来讨论[1]. 这里我们将简单地假定，现在所描述的零自旋粒子是服从对称统计的玻色子，这就意味着，在差别仅是交换了玻色子的两个 Feynman 图之间，必定有一个相对正号，而不是相对负号.

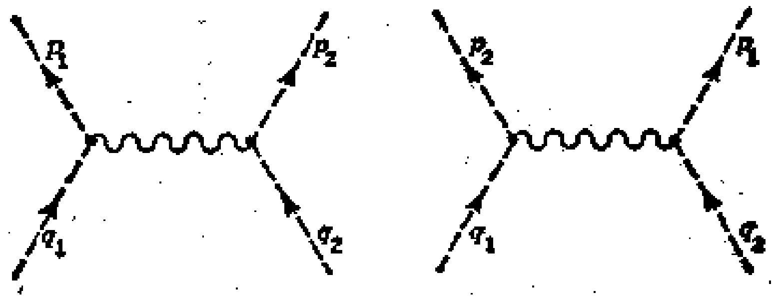


图 9.8 π^+—π^+ Coulomb 散射

和闭合迴线一起，或者是在散射与湮灭的图之间，不再有因子 (−1) 出现. 这些因子 (−1) 是在电子的图中引入的(如在图 8.1*b* 和图 8.1*c* 过程的振幅 (8.2) 和 (8.5) 中)，它们是通过把 Pauli 原理应用于空穴理论的态而引入的. 对于玻色子，我们没有充满的负能海，从而必须以不同的方法来论证相对符号. 在相同玻色子的库仑散射中，图 9.8 的两个 Feynman 图的振幅之间的相对符号是正的. 由此，通过改变两条线的能量符号，我们得到玻色子——反玻色子散射的振幅；例如，通过替换

$$q_1 \longleftrightarrow -p_2 \tag{9.38}$$

我们得到图 9.9 所阐明的 Feynman 图的振幅. 与图 9.9 的 Feynman 图相对应的两个振幅之间的相对符号仍然是正的，如果替换 (9.38) 是从散射图 9.8 到散射图 9.9 的唯一的改

---

1) W. Pauli, *Phys. Rev.*, **58**, 716(1940); W. Pauli, V. W. eisskopf, *and* L. Rosenfeld, "*Niels Bohr and the Development of Physics*", *McGraw-Hill Book Company, Inc.*, *New York*, 1955. 关于这个论证的讨论，见本书下卷《相对论性量子场》.

变. 方程(9.38)是在(7.85)中对电子过程已经遇到过的、现在又被推广到玻色子振幅的替换规则的一个例子. 对于图

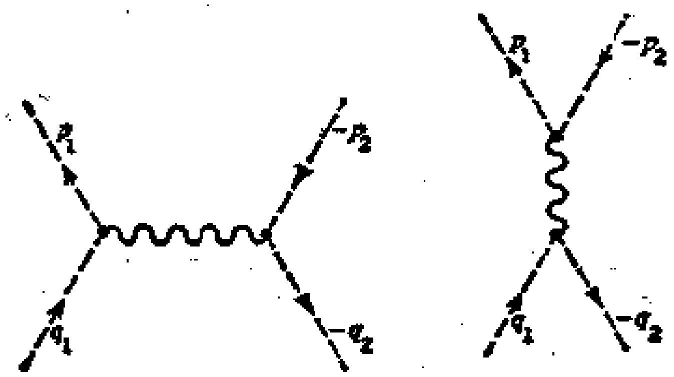


图 9.9 π^+-π^- Coulomb 散射

9.10 所示的全部三个振幅,替换规则导致相对正号. 图 9.10*a* 和图 9.10*b* 在顶点 *y* 之下是全同的, 从而在它们之间有相对正号. 因为,在图 9.10*a* 中,伴随着 *u* 与 *v* 之间的附加相互作用的引入,并没有相对于图 9.10*c* 的相对负号,我们得出结论: 正如在本段的开头说过的,并没有因子(—1)伴随图

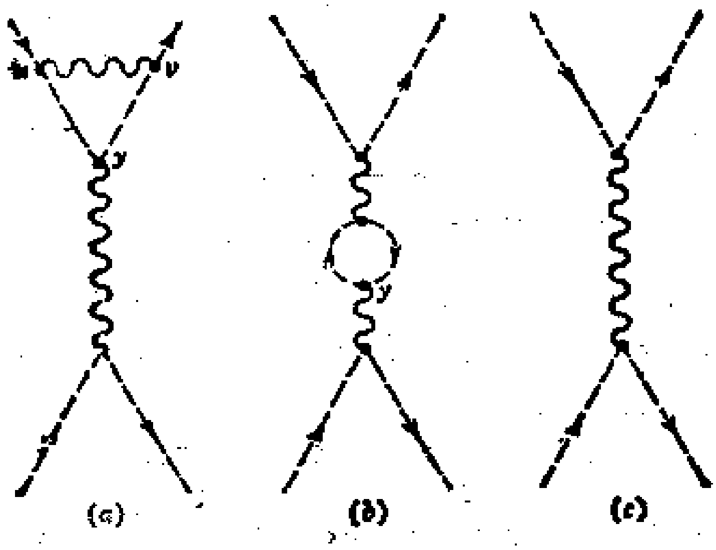


图 9.10 对 π^+-π^- Coulomb 散射的四阶贡献

9.10b 的闭合迴线出现。

诸如 π 介子和 K 介子之类的零自旋玻色子（它们也表现出重正化效应）的电磁相互作用的高阶计算可以完全仿照上一章的考虑继续下去。我们在这里不再详细地往下讨论，因为，在有可能与物理观察作比较之前，必须把 π 和 K 介子与它们自己、以及与核子的更强得多的相互作用也包括进来。这些非电磁耦合的讨论将在下一章介绍。

9.7 Klein-Gordon 方程的非相对论性约化和解释

存在着这样的物理情况，在这种情况下，用通常单粒子量子力学以及几率解释的语言对 π 介子作近似描述是很合乎需要的。例如，荷电 π 介子与物质中的原子电场和磁场、或者与外加场的相互作用，以及 π-介子原子的性质，都可以从这种观点来研究。

这与单粒子的 Dirac 电子理论获得成功的应用和成功的解释相类似。在这些情况下，我们希望展现一个向Schrödinger 方程以及向经典对应极限靠拢的非相对论性化简。

在第一章刚开始时，似乎是不可能建立一个准确的、具有几率解释的单粒子量子力学，于是我们放弃了二阶 Klein-Gordon 方程。我们这样做了而倾向于 Dirac 方程，因为它和非相对论性 Schrödinger 理论一样，对时间的导数是一阶的。但是，现在我们已经清楚看到，Dirac 方程的单粒子图象仅仅适用于有限的情况，诸如弱的、缓变的场，在这种场中，正能谱和负能谱之间仍然留下了一个宽的能隙～$2mc^2$。在这种物理情况下，我们转来寻求 Klein-Gordon 方程的一个近似的单粒子量子力学。

为了把 Klein-Gordon 方程化为仅含时间的一阶导数的 Schrödinger 形式，我们的第一步是把 (9.1) 重写成一对一阶

方程[1]. 定义

$$\xi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \dot{\varphi} \tag{9.39}$$

并把(9.1)重写为

$$\dot{\xi} = \frac{\partial \xi}{\partial t} = (\nabla^2 - m^2)\varphi \tag{9.40}$$

我们便达到了这个目的. 较为方便的是引进两个线性组合

$$\vartheta = \frac{1}{2}\left(\varphi + \frac{i}{m}\dot{\varphi}\right) \quad \chi = \frac{1}{2}\left(\varphi - \frac{i}{m}\dot{\varphi}\right) \tag{9.41}$$

它们具有简单的非相对论性极限. 对于一个静止的正能自由粒子

$$\varphi \propto e^{-imt} = \frac{i}{m}\dot{\varphi} \tag{9.42}$$

于是在这一限制下

$$\vartheta = \varphi \propto e^{-imt} \qquad \chi = 0 \tag{9.43}$$

对于负能解,或反粒子解,在这一限制下是

$$\vartheta = 0 \quad 和 \quad \chi = \varphi \propto e^{+imt} \tag{9.44}$$

因而, ϑ 起着类似于 Dirac 旋量的大分量的作用,而 χ 起着类似于小分量的作用.用 ϑ 和 χ 来表示, Klein-Gordon 方程现在是

$$\begin{aligned} i\frac{\partial \vartheta}{\partial t} &= -\frac{\nabla^2}{2m}(\vartheta + \chi) + m\vartheta \\ i\frac{\partial \chi}{\partial t} &= +\frac{\nabla^2}{2m}(\vartheta + \chi) - m\chi \end{aligned} \tag{9.45}$$

---

1) 这里我们遵循下文的讨论: H. Feshbach and F. M. H. Villars, *Rev. Mod. Phys.*, 30,24 (1958). 参看 N. Kemmer, *Proc. Roy. Soc.* (*London*), **A173**, 91(1939); Sakata *and* Taketani, *Proc. Math.-Phys. Soc. Japan*, **22**, 757(1940); 和 W. Heitler, *Proc. Roy. Irish Acad., Sec. A*, **49**, 1(1943).

我们引进更为紧凑的二分量记号

$$\Phi=\begin{bmatrix}\vartheta\\ \chi\end{bmatrix} \tag{9.46}$$

并写出

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t}=H_0\Phi \tag{9.47}$$

其中自由粒子的哈密顿算符 H_0 由下式给出

$$H_0=-\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\frac{\nabla^2}{2m}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}m \tag{9.48}$$

尽管 (9.47) 是 Schrödinger 形式,但是它却类似于 (9.1), 并不导致守恒的正定的几率,因为 H_0 不是厄米算符. 动能项中的非厄米矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$ 把"大"分量和"小"分量耦合到了一起.

对于一个缓慢运动的粒子, 略去 ∇^2 到最低阶, 我们化简到 Schrödinger 方程,并在正频率和负频率两种情况下化简到解 (9.43) 和解 (9.44). 通过直接从 Dirac 理论(第四章)借用 Foldy-wouthuysen 技巧, 我们可以系统地并入来自动能项的修正. 这里, $\rho=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ 是在 Dirac 方程的化简中 α 的非厄米类似物,而 $\eta=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ 是 β 的类似物. 利用导致 (4.1) 的论证,我们令

$$\Phi'=e^{iS}\Phi \tag{9.49}$$

其中

$$S=\eta\rho\theta(\boldsymbol{p})=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\theta(\boldsymbol{p}) \tag{9.50}$$

并发现当

$$\theta(\boldsymbol{p})=-\frac{i}{2}\tanh^{-1}\frac{\boldsymbol{p}^2/2m}{m+\boldsymbol{p}^2/2m} \tag{9.51}$$

时$\left(\text{其中 } \boldsymbol{p}=\frac{1}{i}\boldsymbol{\nabla}\right)$，奇算符 ρ 便从哈密顿量中消去. 变换 (9.49) 到 (9.51) 不是么正的，并从一个并不是厄米的哈密顿量 (9.48) 引导出一个新的哈密顿量，它是:

$$H_0' = e^{iS}H_0e^{-iS} = \eta\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2} \tag{9.52}$$

在这种形式下，正能解和负能解完全分开，而能量——动量关系与自由电子的情况一样. (9.52) 与 (4.1) 的唯一区别是，现在没有由于自旋自由度的双重解. 因为 H_0' 是厄米的，我们就有自由给这个表示中的解 Φ' 以一个几率解释. 对于正频率解

$$\Phi'^{(+)}(x) = e^{-i\omega_p t}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}a^{+}(\boldsymbol{x}) \tag{9.53}$$

我们有

$$\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2}\,a^{(+)}(\boldsymbol{x}) = \omega_p a^{(+)}(\boldsymbol{x}) \tag{9.54}$$

其中

$$P(\boldsymbol{x}) = |a^{(+)}(\boldsymbol{x})|^2 \tag{9.55}$$

代表几率密度而

$$\omega_p = \int \Phi'^{(+)*}(x)H_0'(\boldsymbol{x})\Phi'^{(+)}(x)d^3x \tag{9.56}$$

代表能量. 对于负频率解，我们写出

$$\Phi'^{(-)}(x) = e^{i\omega_p t}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}a^{(-)}(\boldsymbol{x}) \tag{9.57}$$

能量本征方程类似于 (9.54)

$$\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2}\,a^{(-)}(\boldsymbol{x}) = \omega_p a^{(-)}(\boldsymbol{x}) \tag{9.58}$$

而几率可以像在 (9.55) 中那样定义

$$P(\boldsymbol{x}) = |a^{(-)}(\boldsymbol{x})|^2 \tag{9.59}$$

但是，现在，由于 (9.52) 中的 η，哈密顿量的期望值是能量本

征值的反号：

$$\omega_p = -\int \Phi'^{(-)*}(x) H_0'(x) \Phi'^{(-)}(x) d^3x \qquad (9.60)$$

我们把 $\Phi'^{(-)*}$ 与反粒子波函数联系起来，因为，按(9.52)，对于一个自由粒子 $H_0' = H_0'^*$，并且，按照传播子图象[(9.11)，(9.10)，和(9.5)]，正是负能解的复共轭沿时间正向传播。

当存在外电磁场时，一般说来，我们不再能够把 Klein-Gordon 方程对角化成为分离的正频率和负频率部分。但是，仿照(4.2)到(4.4)那样进行下去，我们可以在有弱的缓慢变化外场时实现近似对角化。在(9.1)中，如果我们再次通过最小替换

$$p_\mu \to p_\mu - eA_\mu$$

引进场相互作用，Klein-Gordon 方程在(9.48)的二分量语言中变为

$$i\frac{\partial \Phi(x)}{\partial t} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\frac{\pi^2}{2m} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} m + e\Phi(x)\right\}\Phi(x)$$

式中 $\pi = p - eA$. Φ 如同在(9.46)和(9.41)中那样定义，只是

$$\xi = \left[\frac{\partial}{\partial t} + ie\Phi(x)\right]\phi$$

代替了(9.39). 在(4.2)中认同

$$\beta = \eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\theta = \rho\frac{\pi^2}{2m} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\frac{\pi^2}{2m} \qquad (9.61)$$

$$\varepsilon = e\Phi + \eta\frac{\pi^2}{2m}$$

我们得到(4.4)，其中 β 换成了 η. 在静外场的特殊情况下，

我们求得近似的 Schrödinger 方程，直到 $1/m^4$ 阶的项：

$$i\frac{\partial\Phi'}{\partial t}=H'\Phi' \quad \Phi'=e^{iS}\Phi$$

其中

$$H'=\eta\left(m+\frac{\pi^2}{2m}-\frac{\pi^4}{8m^3}+\cdots\right)+e\Phi$$

$$+\frac{1}{32m^4}[\pi^2,[\pi^2,e\Phi]]+\cdots \tag{9.62}$$

第一项是 $\sqrt{m^2+\pi^2}$ 的二项式展开，表明了正确的相对论性质量增长，如同在 Dirac 理论中一样．在一个外加磁场中，它以比率 m/E 使轨道 g 减小，如同我们在 Dirac 粒子情况下所见到的．(9.62) 的最后一项是 Darwin 项，它修正一个点电荷的经典静电相互作用 $e\phi(\boldsymbol{x})$，类似于 Dirac 理论的颤动修正．但是，在这里，与 (4.5) 和 (4.7) 不同，它首先出现于 $1/m^4$ 阶．

只要我们限于 Foldy-Wouthuysen 程序是收敛的物理问题，而且用级数 (4.4) 或 (9.62) 的少数几项就导致准确描述的好的近似，则我们就可以像在非相对论性量子力学中那样讨论介子的相互作用．直到 H' 中所保留项的准确度内，在这个表象中正频率解和负频率解是分开的，且哈密顿量是厄米的，从而，我们可以按照第一章中所给出的公设，作出传统的非相对论性量子力学的几率解释．

以 (9.62) 作为一个例子，并仿照 (9.53)，把在这个表示中的正频率解写作

$$\Phi_n'^{(+)}(x)=e^{-iE_nt}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\phi_n^{(+)}(\boldsymbol{x}) \tag{9.63}$$

我们有

$$\left[\left(m+\frac{\pi^2}{2m}-\frac{\pi^4}{8m^3}+\cdots\right)+e\Phi\right.$$

$$+\frac{1}{32m^4}[\pi^2,[\pi^2,e\Phi]]\cdots\Big]\psi_n^{+}(\boldsymbol{x})=E_n\psi_n^{(+)}(\boldsymbol{x})$$

(9.64)

几率密度由下式给出

$$P(x)=|\Phi_n'^{(+)}(x)|^2=|\psi_n^{(+)}(\boldsymbol{x})|^2 \qquad (9.65)$$

并且能量本征值 E_n 与 H 的期望值相一致，如同在 (9.56) 一样：

$$E_n=\int\psi_n^{(+)*}(\boldsymbol{x})H'(\boldsymbol{x},e)\psi_n^{(+)}(\boldsymbol{x})d^3x \qquad (9.66)$$

其中 $H'(\boldsymbol{x},e)$ 是 (9.64) 左边的算符

$$H'(\boldsymbol{x},e)=\left(m+\frac{\pi^2}{2m}-\frac{\pi^4}{8m^3}+\cdots\right)+e\Phi$$

$$+\frac{1}{32m^4}[\pi^2,[\pi^2,e\Phi]]+\cdots \qquad (9.67)$$

对于负频率解，我们像在 (9.57) 中一样写出

$$\Phi_n'^{(-)}(x)=e^{+iE_nt}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\psi_n^{(-)}(\boldsymbol{x}) \qquad (9.68)$$

并从 (9.62) 求得

$$H'(\boldsymbol{x},-e)^*\psi_n^{(-)}(\boldsymbol{x})=E_n\psi_n^{(-)}(\boldsymbol{x}) \qquad (9.69)$$

同样，我们是把负能解的复共轭与反粒子联系起来，因为 $\psi_n^{(-)*}(\boldsymbol{x})$ 满足

$$H'(\boldsymbol{x},-e)\psi_n^{(-)*}(\boldsymbol{x})=E_n\psi_n^{(-)*}(\boldsymbol{x})$$

上式与 (9.64) 的区别仅仅在于 e 的符号．几率密度是

$$P(x)=|\Phi_n'^{(-)}(x)|^2=|\psi_n^{(-)}(\boldsymbol{x})|^2 \qquad (9.70)$$

而哈密顿量的期望值又是能量本征值的反号，如在 (9.60) 中所发现的：

$$E_n=-\int\Phi_n'^{(-)*}(x)H'\Phi_n'^{(-)}(x)d^3x \qquad (9.71)$$

因为正频率解与负频率解的区别仅在于(9.64)与(9.69)中电荷的符号，对我们具有吸引力的是，通过代入早先引入的对角矩阵 $\eta=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，来重新定义这个 Foldy-Wouthuysen 变换了的表象中的几率和能量期望值：

$$Q_n(x)=\Phi_n'^*(x)\eta\Phi_n'(x) \tag{9.72}$$

$$E_n=\int\Phi_n'^*(x)\eta H'\Phi_n'(x)d^3x \tag{9.73}$$

这个重新定义并不改变对于正频率解的(9.65)和(9.66)，但是，它改变了对于负频率解的(9.70)和(9.71)中的符号。能量本征值与H的期望值是一致的，它现在不论对正频率解还是负频率解都是正的，如标准的量子力学一样。然而，现在$Q(x)$ 对正频率解$\geqslant 0$ 而对负频率解则$\leqslant 0$，因而分别被解释为粒子和反粒子的电荷密度。

我们可以在 Foldy-Wouthuysen 表象中继续做下去，这个表象，在到H'中保留的诸项的近似之内而且 $1/m$ 的幂级数是收敛的情况下，与标准的量子力学有相同的形式。比如说，可以从(9.62)算出π-介子原子的能级和跃迁几率而附加以对 Schrödinger 理论的相对论性质量修正和 Darwin 修正。此外，由

$$\frac{d}{dt}\langle O\rangle=i\langle[H,O]\rangle+\left\langle\frac{\partial O}{\partial t}\right\rangle \tag{9.74}$$

可以确立一个经典对应并导出 Ehrenfest 关系。

单粒子几率解释只是限于正频率解和负频率解可以通过 Foldy-Wouthuysen 程序加以分开的那些情况。它将不适用于具有强场和迅速变化场的物理问题，在这些情况下，我们必须考虑到$\pi^+\pi^-$介子偶的存在。利用定义(9.72)和(9.73)在一般情况下也将适用的假设，我们可通过反变换

$$\Phi = e^{-iS}\Phi' \tag{9.75}$$

回到原来的表象并研究这些内积的结构．这里我们前进时必须小心一点，因为联系两个表象的变换不是么正的．方程(9.50)和(9.51)表明，对于自由粒子的情况

$$S = -S^+ \tag{9.76}$$

对于能量，因为$\eta S = -S\eta$，我们求得

$$\begin{aligned}
\omega_p &= \int \Phi_p'^*(x)\eta H_0'\Phi_p'(x)d^3x \\
&= \int \Phi_p^*(x)e^{-iS^+}\eta H_0' e^{iS}\Phi_p(x)d^3x \\
&= \int \Phi_p^*(x)\eta e^{-iS}H_0' e^{iS}\Phi_p(x)d^3x \\
&= \int \Phi_p^*(x)\eta H_0\Phi_p(x)d^3x
\end{aligned} \tag{9.77}$$

它具有相同的形式．类似地，对于电荷，我们利用(9.46)和(9.41)求得

$$\begin{aligned}
\int Q(x)d^3x &= \int \Phi_p'^*(x)\eta\Phi_p'(x)d^3x \\
&= \int \Phi_p^*(x)\eta\Phi_p(x)d^3x \\
&= \int d^3x[\vartheta^*(x)\vartheta(x) - \chi^*(x)\chi(x)] \\
&= \frac{i}{2m}\int d^3x\varphi^*(x)\overleftrightarrow{\partial}_0\varphi(x)
\end{aligned} \tag{9.78}$$

上式(乘以$2m$)已被肯定为(9.4)中的守恒荷．

当存在相互作用时，得到了类似的结果．此时，如同第四章，Foldy-Wouthuysen 变换形式为

$$\Phi' = \cdots e^{iS''}e^{iS'}e^{iS}\Phi$$

其中每一个$S^{(i)}$都满足

$$S^{(i)+} = -S^{(i)} \qquad S^{(i)}\eta = -\eta S^{(i)}$$

如同 (9.76). 因此，在 (9.78) 中 η 存在时所定义的电荷密度在原来的表象中仍采取简单的形式，并与 (9.17) 的电荷密度一致. 类似地，对于在静外场中的 π^+ 或 π^- 介子的能级，我们有

$$E=\int \Phi'^*(x)\eta H'(x)\Phi'(x)d^3x=\int\Phi^*(x)\eta H(x)\Phi(x)d^3x \tag{9.79}$$

在两个表象之间的期望值的这种简单对应启示了我们，在期望值的普遍定义中插入矩阵 $\eta=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，以使

$$\begin{aligned}\langle O'\rangle &= \int\Phi'^*(x)\eta O'(x)\Phi'(x)d^3x\\ &= \int\Phi^*(x)\eta O(x)\Phi(x)d^3x=\langle O\rangle\end{aligned}$$

其中 $O'(x)=e^{IS}O(x)e^{-IS}$. 没有矩阵 η，我们在两个表象之间就得不到如此简单的形式对应. 把 η 引入定义 (9.80) 的物理效果是：当系统处在负频率态时，其物理可观察量的期望值要乘以 -1. 这是与负频率解沿时间逆向传播的要求相联系着的，这样，它颠倒了发射和吸收的作用，并把物理可观察量与这些负能解的参数的负值联系起来. 在正电子理论中，负频率逆向传播的边界条件是由空穴理论来保证的；对于玻色子，没有空穴理论，我们必须满足于传播子理论的论证，或者转到量子场论的形式.

在结束时，我们回想到，我们现在已经对一些玻色子的物理问题的解作出了几率解释，对于这些问题 Foldy-Wouthuysen 程序是收敛的. 特别是，对于自由粒子，我们构成了分开正频率解与负频率解，或粒子解与反粒子解的准确变换. 这就证明了我们在 (9.21)、(9.22) 和 (9.24) 中把 S 矩阵解释为几率幅是有道理的.

把玻色子与反玻色子区别开的荷不一定都是电荷，而可以是具有完全不同特征的荷．例如，在自然界中存在着 K_0 和 $\bar{K}_0$，它们是电中性的但却以其“奇异荷”[1] 的符号不同而互为反粒子．此外，玻色子可以什么荷也不带，这时它和它的反粒子完全一样；π^0 介子就是这样一个例子．在这种情况下波函数是实的且 $Q(x)=0$．

习　题

1．在一阶 Born 近似下，计算一个 π^+ 介子被一个 K^- 介子 Coulomb 散射的微分截面（实验室坐标系）．

2．计算在质心系中一个 π^+ 介子被一个 π^+ 介子散射的微分散射截面，并与电子-电子散射的方程 (7.84) 作比较．

3．计算一个 π^+ 介子在 Coulomb 场中做轫致辐射的微分截面以及 $\pi^+\pi^-$ 粒子偶产生的微分截面，并与 Bethe-Heitler 公式作比较．

4．计算在极端相对论性极限 $E\gg mc^2$ 下，$\pi^+\pi^-$ 粒子偶产生的总截面，并与电子-正电子偶的类似结果作比较．

5．计算 $\pi^+\pi^-$ 粒子偶对真空极化的贡献，并解释结果的符号．

6．计算一个 π^+ 介子的电磁自能，并与一个电子的电磁自能作比较．

7．验明对于荷电 π 介子，波函数与顶点的重正化常数直到 e^2 的第二阶是相等的，即 $Z_1=Z_2$，且 $\Lambda_\mu(p,p)=-\partial\Sigma(p)/\partial p^\mu$，如同电子的方程 (8.51) 和 (8.54) 一样．

8．解出束缚在一个 Coulomb 场中的 π^- 介子的能级．

9．通过由方程 (9.74) 导出 Ehrenfest 关系，建立 π 介子 Schrödinger 方程的经典对应．

10．构成满足自由波方程

$$\left\{(\Box+m^2)g_{\mu\nu}-\frac{\partial}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right\}\phi^\nu=0$$

1）这在本书下卷中讨论．

的矢量介子的 Feynman 传播子。

11. 给出附录 B 中“零自旋玻色子的电动力学”的规则 4 的论证。然后证明这个规则导致一个直到 e^4 阶的、么正的 $\pi^+\pi^-$ 弹性散射振幅。

第十章 非电磁相互作用

10.1 引言

有了传播子理论——它是为自旋是 0 和 1/2 的"基本"粒子的电磁相互作用而发展起来的——这个武器，我们来着手考虑这些粒子的其他相互作用. 这些相互作用分为不相同的三类. 第一类是重力相互作用，在通常的实验室能量下，它是以一个极微小的无量纲的耦合常数 $(M_1M_2G/\hbar c) \approx 10^{-40}$ 来表征的，从而我们将把它忽略. 第二类是弱相互作用，它导致在诸如 β 衰变和 π、K 和 μ 介子的衰变中[见 (9.3)] 粒子之间的嬗变. 在低能和中能区域（$\lesssim$1Bev)，这些相互作用由一个无量纲的耦合常数 $\approx 10^{-5}$ 至 10^{-6} 来表征. 最后，还存在着强相互作用，以耦合常数 $\gtrsim 1$ 来表征，它承担着束缚原子核的力，并提供了在诸如(9.2)的反应中产生 π、K、Λ、Σ 和 Ξ 粒子的机制.

对于弱和强相互作用的了解，还没有进展到它们的效应可以从一个普遍原理导出这样一种程度，如像在引力理论中的等效原理及普遍协变性原理，或者像"最小电磁相互作用"原理，它指引用替换[1] $p_\mu \to p_\mu - eA_\mu$ 来引进电磁耦合. 在没有这样一个高的出发点的情况下，就需要直接求助于可得到的实验证据以及对称性原理，尤其是 Lorentz 不变性，以限制相互作用的可能的形式.

"顶点是什么?"是讨论弱和强相互作用时的中心问题，我

1) M. Gell-Mann, *Nuovo Cimento Suppl.* 2.4,848 (1956).

们现在就转向这个问题. 我们在传播子方法的框架内进行讨论，并限制于耦合常数的最低阶计算. 从细致的实验比较的观点看来，这是一个非常严格的限制. 对于强相互作用，展开参数超过1；对于现在尚处于其初级形式的弱相互作用，高阶图以一种不愉快的方式依赖闭合迴线动量积分中的切断，这种方式不容许把发散分离到重正化常数中去，如在第八章的电动力学计算中所阐明的那样.

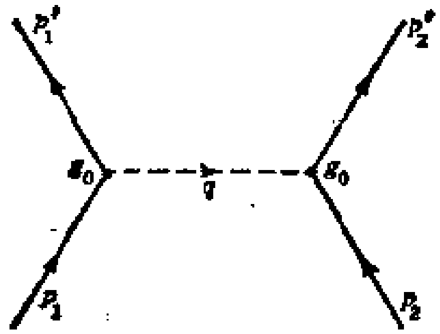


图 10.1 交换单个 π^0 介子的核子-核子相互作用

10.2 强相互作用

1935 年，汤川[1]在强的、短程核力与粒子间的电磁力之间作了类比. 如果库仑力起因于交换一个虚量子，或光子，或许核力同样地起因于在核子之间交换一个虚粒子，它必定是整数自旋的. 对于一个自旋为 0 质量为 μ 的粒子，我们可以利用 Klein-Gordon 传播子 (9.36)，写出与图 10.1 相应的一阶散射振幅:

$$\mathfrak{M} \sim \frac{g_0^2}{q^2 - \mu^2 + i\varepsilon} \tag{10.1}$$

在写下(10.1)时，我们已经去掉所有来自顶点的因子，在这些

1) H. Yukawa, *Proc. Phys-Math. Soc., Japan*, **17**, 48 (1935).

顶点上，以虚线代表的粒子被两个核子发射或吸收，这两个核子用实线画出，分别具有初动量 p_1、p_2 和末动量 p_1'、p_2'. 不变动量转移 $q^2 = (p_1 - p_1')^2 = (P_2' - p_2)^2$ 是类空的 $(q^2 < 0)$. 在非相对论极限下，核子的反冲动能相对于它们的静能可以忽略，$q^2 \approx -|\boldsymbol{q}|^2$，从而我们可以取 (10.1) 的近似为

$$\mathfrak{M} \sim \frac{g_0^2}{|\boldsymbol{q}|^2 + \mu^2} \tag{10.2}$$

作 Fourier 变换到座标空间，我们看到 $\mathfrak{M}$ 相应于在一个汤川势

$$V(r) \sim g_0^2 \frac{e^{-\mu r}}{r}$$

中散射的 Born 近似振幅. 因为核力程延伸到 $\sim 10^{-13}$ cm，约为经典电子半径的 1/3，被交换的粒子应该有一个质量

$$\mu \sim \frac{3m_e}{\alpha} \sim 200\text{MeV}$$

这个粒子的强有力的候选者，质量 ~140MeV 的 π 介子，终于在 1947 年被发现；实际上，现在[1]已知有三种这样的粒子存在，质量近似相同的 π^+、π^- 和 π^0. 人们相信，电荷分别为 $+e$、$-e$ 和 0 的这三种 π 介子是在大距离下核力的主要贡献者，尽管较重的粒子如 K 介子对于具有小碰撞参数而大 q^2 的碰撞也可能起作用.

实验上已经确定，π 介子的自旋是零，但其"内禀宇称"是奇的. 对于荷电 π 介子，由反应

$$\pi^+ + d \longleftrightarrow p + p$$

应用细致平衡给出自旋为零，因为在两个方向上进行的这些

1) H. A. Bethe and F. de Hoffman, "*Mesons and Fields*", Vol. II, *Harper & Row, Publishers, New York*, 1955. J. D. Jackson, "*The Physics of Elementary Particles*," *Princeton University Press, Princeton, N. J.*, 1958. M. Gell-Mann and A. H. Rosenfeld, *Ann. Rev. Nucl. Sci.*, 7, 407 (1957).

过程的比值是由统计权重决定的."内禀宇称"通过如下的观察来测定：π^- 从氘原子的 K 层被俘获，导致两个中子

$$\pi^- + d \to n + n$$

按照不相容原理，能由两个中子构成的唯一的 $J=1$ 的态是 $^3P_1$，而这个态宇称是 -1. 如果宇称守恒可以用于这个强作用反应中，π^- 也必须具有奇宇称. 在这一宇称的指定中，我们遵照通常的约定，选择质子和中子具有相同的内禀宇称 $+1$，也就是说，在空间反射(2.33)下给它们的波函数指定相同的位相 $\varphi=0$，使得对于 $\boldsymbol{x}'=-\boldsymbol{x}$，$\psi'(\boldsymbol{x}',t)=+\gamma\times\psi(\boldsymbol{x},t)$. 因为 π^- 是从一个球对称 s 轨道被俘获的，指定给它的波函数的宇称 -1 被认为是它的"内禀宇称". 零自旋和负内禀宇称的性质为 π^+ 和 π^- 介子所共同具有，它们——如在第九章中解释过的——互为反粒子. 对于 π^0 介子，观察双光子衰变

$$\pi^0 \to \gamma + \gamma$$

并结合观察"Dalitz 偶"

$$\pi^0 \to (e^+ + e^-) + (e^+ + e^-)$$

在极化平面[1]内的关联，确定它的自旋为零，宇称为 -1.

有了这点知识，我们沿着电动力学的线索继续把核力的讨论模型化，而从更为仔细地讨论起因于交换单个 π^0 介子的质子-质子散射(如图 10.1)来开始. 例如，考虑质子 1 在一个由质子 2 产生的"π 介子场"中被散射，它类似于在电子-质子散射的讨论中的电磁势 $A_\mu(x)$，方程(7.31).

为了描述这一过程，我们写出一个类似于(6.52)的尝试性的 Dirac 方程，它将有形式

---

1) Plano, Prodell, Samios, Schwartz, *and* Steinberger, *Phys. Rev. Letters*, **3**, 525 (1959).

$$(i\nabla\!\!\!/ - M_p)\psi_p(x) = g_0\Gamma\psi_p(x)\varphi_0(x) \qquad (10.3)$$

其中 g_0 是 e 的类似物而 Γ 是一个待定的 Dirac 矩阵。于是，我们推荐的介子场 φ_0 的方程，类似于 (7.27) 和 (7.33)，在一个待定符号 $\eta_0 = \pm 1$ 的范围内，将是

$$(\Box + \mu_0^2)\varphi_0(x) = -g_0\bar{\psi}_p(x)\Gamma\psi_p(x)\eta_0 \qquad (10.4)$$

实际观察到在很高的准确度内宇称[1]对于核力是守恒的，因此我们要求 (10.3) 和 (10.4) 既是 Lorentz 协变的，又是宇称守恒的。于是，就需要选取 $\Gamma = i\gamma_5$，以使得 (10.4) 的右边像一个实膺标量一样变换，如同左边一样。

我们还可以验明，存在着一个保留 (10.3) 不变的电荷共轭变换，因此，我们可以把第五章讨论的空穴理论直接搬过来，并把负能解重新解释为反质子。反质子波函数像在 (5.5) 中那样由下式构成

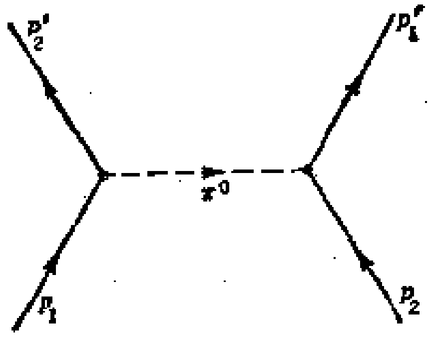


图 10.2 两个质子的 Pauli 交换图

$$\psi_{\bar{p}} = c\bar{\psi}_p^T$$

并满足与 (10.3) 相同的 Dirac 方程，只要 π^0 场与其电荷共轭场是全同的，即

$$(\varphi_0)_c = +\varphi_0$$

相互作用的这个简单的形式多半是不正确的，或者充其

1) G. C. Wick, *Ann. Rev. Nucl. Phys.*, 8, 1 (1958).

量也是不完全的．与电磁相互作用的类似性，加上简单性，是我们写出(10.3)和(10.4)的唯一动机．例如，我们已经任意地排除了包含场量导数的相互作用项的可能性，尽管在上一章讨论荷电 π 介子的电磁耦合时我们已经遇到过这样的项．因此我们应该把(10.3)和(10.4)当作只不过是一个粗糙的简单的模型．因为无疑地，自然具有比这些方程所显示的更为丰富的想像力．这个模型的好处是：它容许讨论核相互作用的一般特征，这些特征在更一般的处理中依然保留下来．

既然对于 π^0-p 顶点有一个候选者，我们就可以计算图10.1的 Feynman 图的振幅．根据(10.4)，由粒子2的"跃迁流"

$$-g_0\eta_0\bar{\psi}_{p_2'}(x)i\gamma_5\psi_{p_2}(x)$$

产生的一阶 π^0 场是

$$\varphi_0(x) = -ig_0\int d^4x' i\Delta_F(x-x')[\bar{\psi}_{p_2'}(x')i\gamma_5\psi_{p_2}(x')]\eta_0 \quad (10.5)$$

这个场在质子1的波函数中产生一个改变，按照(10.3)

$$\Delta\psi_{p_1}(x) = \int d^4x'' S_F(x-x'')[g_0 i\gamma_5\psi_{p_1}(x'')\varphi_0(x'')] \quad (10.6)$$

这样，由(6.53)和(6.56)，散射振幅是

$$S_{fi} = (-ig_0)^2\int d^4x' d^4x''[\bar{\psi}_{p_1'}(x'')i\gamma_5\psi_{p_1}(x'')]$$
$$\times i\Delta_F(x''-x')\eta_0[\bar{\psi}_{p_2'}(x')i\gamma_5\psi_{p_2}(x')] \quad (10.7)$$

把(10.7)与类似式(7.32)和(7.33)作比较，我们得出结论：对 Feynman 图的规则做如下修改：把电动力学的顶点 $e\gamma_\mu$ 替换为 $ig_0\gamma_5$，把光子传播子 $ig_{\mu\nu}D_F(x-x')$ 替换为 π^0 介子的 $+i\Delta_F(x-x')\eta_0$.

对于(10.7)，我们必须加上相应于图10.2的交换贡献，它是由两个质子的全同性引起的．这个贡献的振幅是

$$S_{fi}^{ex} = -(-ig_0)^2\int d^4x'd^4x''[\bar{\psi}_{p_2'}(x'')i\gamma_5\psi_{p_1}(x'')]$$
$$\times i\Delta_F(x''-x')\eta_0[\bar{\psi}_{p_1'}(x')i\gamma_5\psi_{p_2}(x')] \quad (10.8)$$
它与（10.7）的不同之处在于末态质子波函数的互换 $\bar{\psi}_{p_2'}(x) \longleftrightarrow \bar{\psi}_{p_1'}(x)$，以及一个重要的负号，这个负号如同在电子-电子散射（7.82）中一样，保证了初态和末态质子波函数在两个质子互换下的反对称性。

中子-中子散射用类似的方式来描述。我们必须写出一个中子的波动方程，它包含有与 π^0 的相互作用项。此外，我们还给（10.4）加上一个产生 π^0 的中子源项。这里，重要的实验根据是观察到的 p-p 力和 n-n 力（在由诸如质子之间的Coulomb力等电磁相互作用所引起的修正的范围内）的相等[1]。这就暗示着：在一个符号 $\epsilon_0 = \pm 1$ 仍然待定的范围内，中子与 π^0 之间的耦合和质子与 π^0 之间的耦合是相同的。因此，我们对于中子波函数写出
$$(i\nabla\!\!\!\!/ - M_n)\psi_n(x) = -g_0\epsilon_0 i\gamma_5\psi_n(x)\varphi_0(x) \quad (10.9)$$
并且我们把（10.4）替换为
$$(\Box + \mu_0^2)\varphi_0(x) = -g_0[\bar{\psi}_p(x)i\gamma_5\psi_p(x)$$
$$-\epsilon_0\bar{\psi}_n(x)i\gamma_5\psi_n(x)]\eta_0 \quad (10.10)$$

中子与质子之间的微小的质量差 $M_n - M_p \approx 0.002$MeV 被解释为由于质子电荷的电磁效应所引起的，并且在这个近似下，连同所有其他电磁相互作用一起被忽略。方程（10.9）和（10.10）导致一个 n-n 散射振幅，它与 p-p 振幅（10.7）和（10.8）完全相同，因为 $\epsilon_0^2 = +1$。

当我们进而讨论 p-n 散射时，我们还必须考虑到与荷电

---

1) David Wong *and* H. Pierre Noyes, *Phys. Rev.*, **126**, 1866 (1962); G. Breit, *Rev. Mod. Phys.* **34**, 766(1962); H. Pierre Noyes, *Phys. Rev.*, **130**, 2025 (1963); M.M. Lévy, *Phys. Rev.*, **88**, 725 (1952).

的 π^+ 和 π^- 介子的耦合．在散射振幅只包含一个介子交换的最低阶近似中，除了非电荷交换散射（图 10.3a）之外，这些耦合还导致电荷交换型的图（图 10.3b）．在写出 π^+ 的波动方程时，我们又是以观察到的 n-p 力和 p-p 力，在可用于 p-p 系统的态中，在电磁修正的范围内，二者相等为前题的．

与 π^0 的 (10.10) 相类似，对于 π^+ 我们写出

$$(\Box + \mu_+^2)\varphi_+(x) = -g_+\eta_+\bar{\psi}_n(x)i\gamma_5\psi_p(x) \qquad (10.11)$$

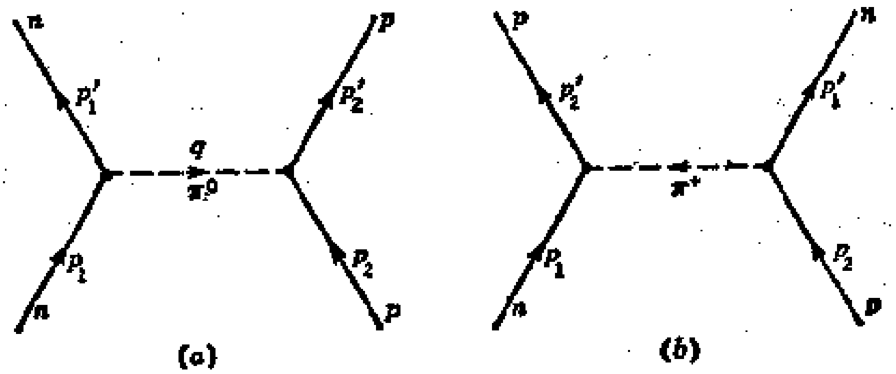


图 10.3　n-p 散射的非电荷交换和电荷交换图

其中符号 $\eta_+ = \pm 1$ 和耦合常数 g_+ 将在以后相对于 g_0 和 γ_0 而确定．(10.11) 的右边导致图 10.4 的顶点，而一个 π^+ 就在一个质子嬗变成中子时从这个顶点发射出来．然后，π^+ 可以沿时间正向或逆向传播．如果是逆向传播，如上一章中在 π^+ 介子传播子理论中所讨论的，则它被解释为具有正能量的 π^-

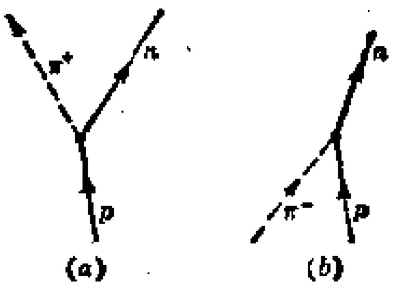


图 10.4　$p \to n$ 顶点

介子，沿时间正向前进并在顶点上被吸收，如图 10.4b.

(10.11) 的复共轭给出电荷共轭粒子，即 π^- 的方程：

$$
\begin{aligned}
(\Box + \mu_+^2)\varphi_+^*(x) &= (\Box + \mu_+^2)\varphi_-(x) \\
&= -g_+^*\eta_+\bar{\psi}_p(x)i\gamma_5\psi_n(x)
\end{aligned} \tag{10.12}
$$

(10.12) 的右边提供了图 10.5 的顶点.

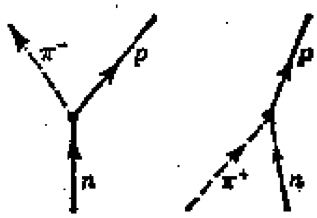


图 10.5 $n\to p$ 顶点

我们现在必须以容许做图 10.4 和图 10.5 的跃迁的附加项来修改中子和质子的波动方程. 把 (10.11) 和 (10.12) 与 (10.3)、(10.9) 和 (10.10) 作比较，我们便可把质子和中子的完全的波动方程写作

$$
\begin{aligned}
(i\nabla\!\!\!/ - M_p)\psi_p(x) &= g_0 i\gamma_5\psi_p(x)\varphi_0(x) \\
&\quad + g_+^* i\gamma_5\psi_n(x)\varphi_+(x) \\
(i\nabla\!\!\!/ - M_n)\psi_n(x) &= -g_0\varepsilon_0 i\gamma_5\psi_n(x)\varphi_0(x) \\
&\quad + g_+\varepsilon_+ i\gamma_5\psi_p(x)\varphi_-(x)
\end{aligned} \tag{10.13}
$$

式中一个附加符号 $\varepsilon_+ = \pm 1$ 仍然是待定的.

为了限制留在波动方程中的常数，我们考虑 n-p 散射并写出与两个最低阶 Feynman 图(图 10.3) 相联系的振幅. 考虑入射中子 (p_1) 在入射质子 (p_2) 所产生的介子场中散射，我们和从前一样求得

$$
\begin{aligned}
S_{fi} = (-ig_0)^2(-\varepsilon_0)\eta_0\int d^4x'd^4x''[\bar{\psi}_{p_1'}(x')i\gamma_5\psi_{p_1}(x')] \\
\times i\Delta_F(x'-x'')[\bar{\psi}_{p_2'}(x'')i\gamma_5\psi_{p_2}(x'')] \\
+(-ig_+)(-ig_+^*)\eta_+\int d^4x'd^4x''[\bar{\psi}_{p_2'}(x')i\gamma_5\psi_{p_1}(x')]
\end{aligned}
$$

$$\times i\Delta_F(x'-x'')[\bar{\Phi}_{p_1'}(x'')i\gamma_5\psi_{p_2}(x'')] \qquad (10.14)$$

如果我们改为考虑入射质子在入射中子所产生的场中散射，(10.14)将通过替换

$$\eta_+ \to \eta_+\varepsilon_+$$

而修改．因此我们置

$$\varepsilon_+ = 1 \qquad (10.15)$$

这因为只是我们的看法不同而已．

为了确定 g_+ 和 g_0 的相对大小，我们再次求助于观察到的 n-p 力和(在按不相容原理对于 p-p 系统所容许的态中) p-p 力近似相同这点．然后让我们比较在反对称态中的两个粒子的 p-p 散射和 p-n 散射．为了做到这一点，我们暂时设想中子与质子完全相同，但仍然是既与中性介子耦合也与荷电介子耦合，并且我们通过添加交换图(带上适当的负号以保证反对称态)来计算其散射．图 10.6 表明图 10.3 的两个图解加上它们的交换部分，其动量和耦合如图所示；图 (c) 是 (a) 的交换图，(d) 是 (b) 的交换图．对散射振幅的这四个贡献的总和是 S_{fi}，其构成就好像 n 和 p 是全同的且服从不相容原理似的，

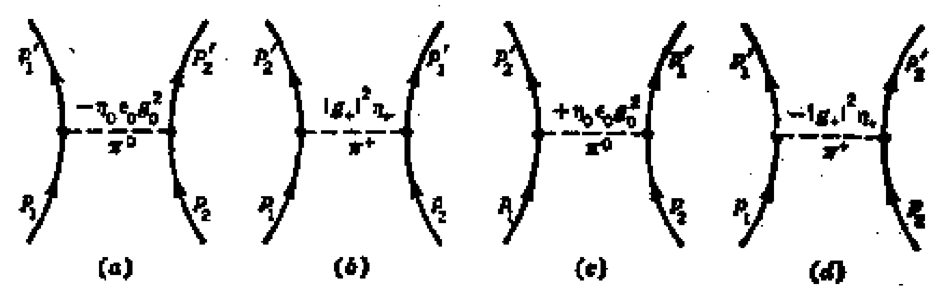


图 10.6　交换一个 π 介子的 p-n 散射的图的总和，包括 Pauli 贡献和电荷交换贡献

$$S_{fi} = -(-i)^2[\eta_0\varepsilon_0 g_0^2 + \eta_+|g_+|^2]$$

$$\times \int d^4x'd^4x''\{[\bar{\Phi}_{p_1'}(x')i\gamma_5\psi_{p_1}(x')]i\Delta_F(x'-x'')$$

$$\times [\bar{\psi}_{p_2'}(x'')i\gamma_5\psi_{p_2}(x'')] - [\bar{\psi}_{p_2'}(x')i\gamma_5\psi_{p_2}(x')]i$$
$$\times \Delta_F(x'-x'')[\bar{\psi}_{p_1'}(x'')i\gamma_5\psi_{p_1}(x'')]\} \qquad (10.16)$$

把 (10.16) 与 (10.7) 和 (10.8) 的总和作比较表明，耦合常数对于 n-p 相互作用与(在对于 p-p 系统有效的反对称态中) p-p 相互作用相等的条件是

$$g_0^2\eta_0 = -|g_+|^2\eta_+ - g_0^2\eta_0 e_0 \qquad (10.17)$$

此式有两个解

$$|g_+|^2 = 0 \quad e_0 = -1 \qquad (10.18)$$

和
$$|g_+|^2 = 2g_0^2 \quad e_0 = +1 \quad \eta_0 = -\eta_+ \qquad (10.19)$$

第一个解(10.18)相应于只交换中性介子，它显然导致在相应的态中 n-p 力和 p-p 力相等.既然 π^+ 和 π^- 介子存在，而且具有图 10.4 和 10.5 类型的顶点(在这些顶点上，产生单独的 π^+ 或 π^-，例如

$$\gamma + p \to n + \pi^+)$$

的反应已被观察到，这就导引我们选择第二个解 (10.19). 当然，可能会有附加的单个中性介子对核力做出贡献;但因为没有清楚的候选者[1]，我们在这里不去管这种可能性.

按照 (10.19)，荷电介子与一个 (p-n) 顶点的耦合比 π^0 与一个 (p-p) 顶点的耦合大到 $\sqrt{2}$ 倍. 因为只有绝对值的平方 $|g_+|^2$ 出现在散射振幅中，我们可以为了方便选取 g_+ 为实数，因此

$$g_+ = \sqrt{2}\, g_0 \qquad (10.20)$$

我们发现，把 (10.19) 中的条件 $\eta_+ = -\eta_0$ 换成书写 Feynman 振幅的附加规则是方便的. 我们写下

$$\eta_+ = +\eta_0 \qquad (10.21)$$

并引进对于每一个图写出振幅的下列附加规则：如果在图中

1) 最近发现的可能的候选者是质量 ~550MeV 的 η^0 介子.

核子交换了奇数个荷电介子，就乘以(−1)。可以表明，这个规则等价于如下的规则：在一个图中不仅相对于 n-n 线和 p-p 线的互换要反对称化，而且相对于 n-p 线的互换也要反对称化．这是因为任何交换一个荷电 π 的图，都可以通过把 n 线与 p 线互换，而与交换一个中性 π 的图联系起来(相对的负号来自 η_0 和 η_+ 与 π 传播子相联系的符号是相反的)．在最低阶这显然是事实；试比较图 10.6a 和 b.

一般说来，为使反对称化的规定完全确定下来，有两种情况需要考虑．第一种情况，如图 10.7a 所阐明的，当在两根不同的核子线之间交换 π^+ 时便会发生．这个情况类似于在上面最低阶运算中遇到的情况.

如果 π 被一个核子发射并被同一个核子重新吸收，必须稍加小心．例如考虑图 10.7b，对于它，一个时间的有序化示于图 10.7c．为了把这个图与一个我们知道其符号特征的图(即是，不包含 π^+ 线的图)联系起来，我们以适当的负号把中子与质子 I 和 II 互换，从而得到图 10.7d．图 10.7d 与图 10.7e 有相同的符号特征，图 10.7e 则与通过交换(e)中的 I 线和 II 线而得到的图 10.7f 符号特征相反．把负号(共有两个)集中，我们看到，如果 π^+ 在同一根核子线上被发射并被重新吸收，我们可以置 $\eta_+=\eta_0$，并给这个图与由 π^0 代替 π^+ 而得到的图以相同的符号特征.

必须强调，我们在这里所做的一切，都是通过结构，把从 p-p 散射情况下得出的反对称化规则(在这些情况下，它有不相容原理的物理基础)做纯粹形式的推广．当用到 n-p 散射情况时，这时粒子是不同的，可分辨的，并能在对称的 $^3S_1$、$^1P_1$、$^3D_{2,1,0}$ 等态中散射，上述规则不过是在"电荷无关"近似下，即在相应的态中 p-p、n-n 和 n-p 力相等的近似下，书写符号的一个方便的规则.

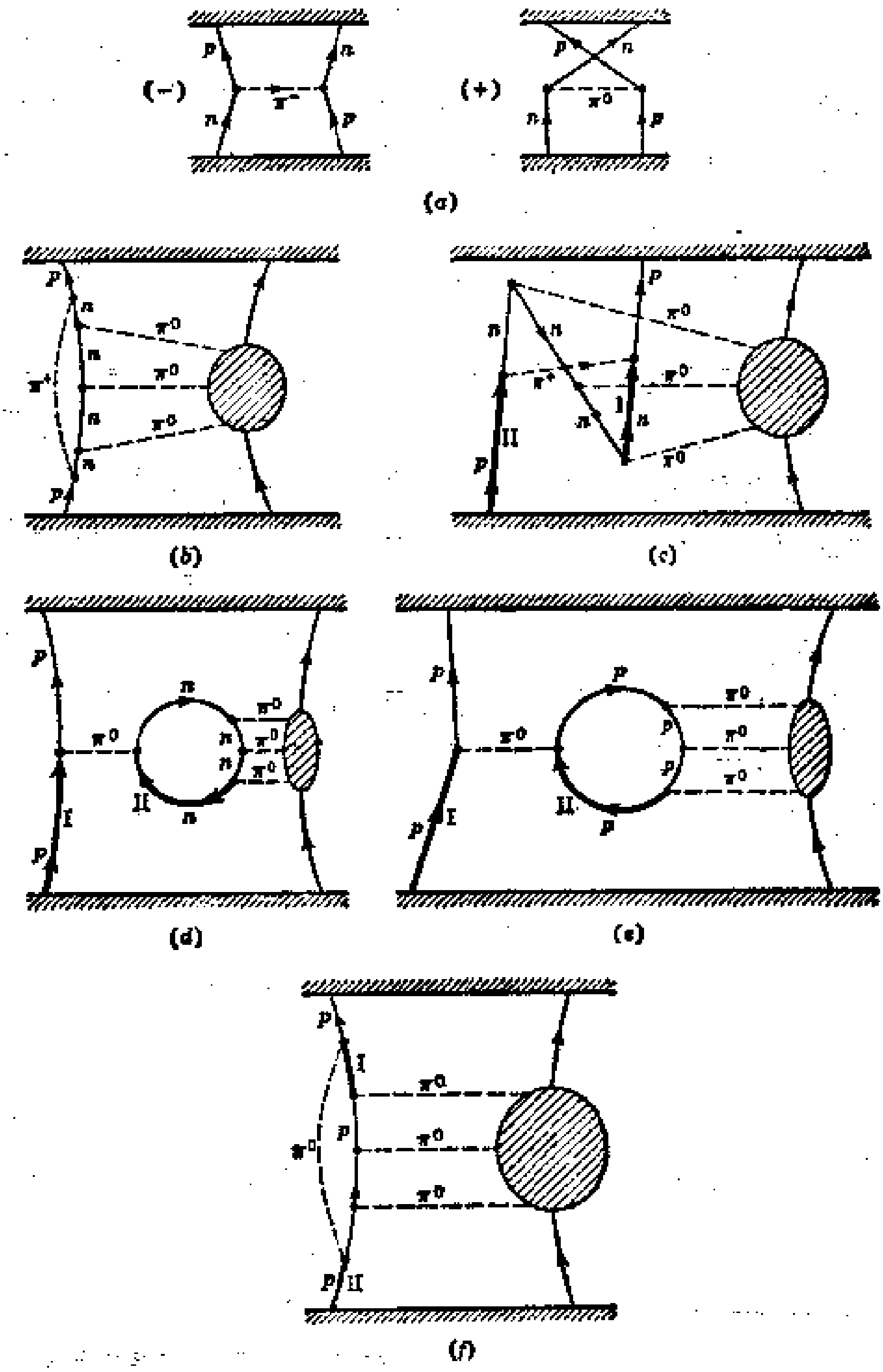


图 10.7　*n-p* 互换反对称化规则

我们引进不相容原理的这种形式的、表面上复杂化了的推广，其理由将见于下一节. 在那里，我们将发展一个把质子和中子当作同一粒子(即核子)的两种状态的简单而统一的描述. 按照这个规则，在 p-n 散射中，当我们如同在图 10.3a 和 10.3b 那样互换末态的 p 和 n 时，我们在散射振幅中引进一个相对负号，正如我们在 p-p 散射的图 10.1 和 10.2 振幅之间，按照不相容原理对两个全同的费密子的要求[1)]，引进一个 -1 一样.

到此，我们已经确定了除 η_0 之外所有的参数；$e_0=e_+=1$ 和 $\eta_+=\eta_0$，加上附加的约定，以交换 n 线与 p 线相区别的两个图应当反对称化. 为了得到 η_0，我们注意到，按照 (10.13) 中的相互作用，一个质子并不总是一个质子，有时候却是一个中子和一个 π^+，如图 10.4 和图 10.5 所阐明的；因此电荷系由 π^+ 和质子交替地携带的. 这就有如下的后果：质子的电磁流和 π^+ 的电磁流都不是分别地在守恒，从上面的波动方程计算这些流(归一化到单位电荷)可以看出这一点

$$
\begin{aligned}
i\frac{\partial}{\partial x_\mu} j_\mu^p(x) &= i\frac{\partial}{\partial x_\mu}(\bar{\psi}_p\gamma_\mu\psi_p) = g_+^*\bar{\psi}_p i\gamma_5\psi_n\varphi_+ \\
&\quad - g_+\bar{\psi}_n i\gamma_5\psi_p\varphi_- \\
i\frac{\partial}{\partial x_\mu} j_\mu^{\pi^+}(x) &= i\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[i\varphi_+^*\left(\frac{\vec{\partial}}{\partial x_\mu}-\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^\mu}\right)\varphi_+\right] \\
&= -\eta_+ g_+^*\bar{\psi}_p i\gamma_5\psi_n\varphi_+ \\
&\quad + \eta_+ g_+\bar{\psi}_n i\gamma_5\psi_p\varphi_-
\end{aligned}
\tag{10.22}
$$

但是，对于质子和 π^+ 流之和却存在着一个微分流守恒定律：

---

1) 约定 (10.21) 加上反对称化规则，适用于所有的过程，即包括核子线间的 π 交换，也包括自能插入.

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[j_\mu^p(x) + j_\mu^{\pi^+}(x) \right] = 0 \tag{10.23}$$

只要在 π^+ 方程 (10.11) 中我们选取

$$\eta_+ = 1 \tag{10.24}$$

我们做了这个选择，是为了排除未观察到的定域的电荷源和电荷汇的可能性. 由 (10.21) 得出

$$\eta_0 = \eta_+ = 1 \tag{10.25}$$

10.3 同位旋形式

按照在相应的态中，n-n、n-p 和 p-p 散射振幅应相等的要求，把规则 (10.15)、(10.19)～(10.21) 和 (10.25) 总结在一起，我们可以利用一个实的未知耦合常数把波动方程 (10.10) 至 (10.13) 写出来，概括如下：

$$\begin{aligned}(i\nabla\!\!\!\!/ - M_p)\psi_p &= g_0 i\gamma_5(\psi_p\varphi_0 + \sqrt{2}\,\psi_n\varphi_+)\\ (i\nabla\!\!\!\!/ - M_n)\psi_n &= g_0 i\gamma_5(-\psi_n\varphi_0 + \sqrt{2}\,\psi_p\varphi_-)\end{aligned} \tag{10.26}$$

$$\begin{aligned}(\Box + \mu_0^2)\varphi_0 &= -g_0(\bar{\psi}_p i\gamma_5\psi_p - \bar{\psi}_n i\gamma_5\psi_n)\\ (\Box + \mu_+^2)\varphi_+ &= -g_0\sqrt{2}\,\bar{\psi}_n i\gamma_5\psi_p\\ (\Box + \mu_+^2)\varphi_- &= (\Box + \mu_+^2)\varphi_+^* = -g_0\sqrt{2}\,\bar{\psi}_p i\gamma_5\psi_n\end{aligned} \tag{10.27}$$

质子与中子的方程在形式上的类似启发我们引进一个核子波函数

$$\Psi = \begin{bmatrix}\psi_p\\ \psi_n\end{bmatrix} \tag{10.28}$$

来描述它们. 核子波函数用一个八-分量旋量来代表，上面四个分量代表质子旋量，下面四个分量代表中子旋量. 自由 Dirac 方程是对角的，在 p 分量与 n 分量之间没有耦合；而在“电荷无关”近似中，加上 $M_p \approx M_n \approx M$，自由 Dirac 方程简单地就是

$$(i\nabla\!\!\!\!/ - M)\Psi = 0$$

对于在(10.26)中的相互作用项,我们必须引进把 n 和 p 波函数混合的非对角矩阵. 作为这种混合的一个记号，引进三个 Pauli 矩阵

$$\tau_1=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\quad \tau_2=\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}\quad \tau_3=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\tag{10.29}$$

是方便的,其中每一个元素理解为作用于(10.28)中的 ψ_p 或者 ψ_n 的所有四个分量,例如

$$\tau_1\Psi=\begin{bmatrix}\psi_n\\\psi_p\end{bmatrix}$$

我们以 $\boldsymbol{\tau}$ 标记这里的矩阵,是为了把它们与 Pauli 矩阵 $\boldsymbol{\sigma}$ 相区别, 后者作用于中子和质子的自旋分量. 现在可以把方程(10.26)合并在一起并重写为

$$\begin{aligned}(i\nabla\!\!\!/-M)\Psi=g_0i\gamma_5(\tau_3\Psi\varphi_0&+\sqrt{2}\,\tau_+\Psi\varphi_+\\&+\sqrt{2}\,\tau_-\Psi\varphi_-)\end{aligned}\tag{10.30}$$

其中

$$\tau_+\equiv(1/2)(\tau_1+i\tau_2)=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\tag{10.31}$$

$$\tau_-\equiv(1/2)(\tau_1-i\tau_2)=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$$

分别是电荷"增加"和"降低"算符. 我们把方程进一步简化为非常紧凑的形式,如果我们引进一个"矢量"$\boldsymbol{\varphi}$,具有三个分量

$$\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)\tag{10.32}$$

其中

$$\varphi_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_++\varphi_-)\qquad \varphi_2=\frac{i}{\sqrt{2}}(\varphi_+-\varphi_-)$$

$$\varphi_3=\varphi_0$$

这就给出

$$(i\nabla\!\!\!/-M)\Psi=g_0i\gamma_5(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\varphi})\Psi\tag{10.33}$$

用同样的方法,加上忽略微小的 $\pi^\pm-\pi^0$ 质量差, $\mu_0\approx\mu_+\approx\mu$, 可以把方程(10.27)合并成一个对于 π 介子的近似方程:

$$(\Box+\mu^2)\varphi=-g_0\bar{\Psi}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}\Psi \tag{10.34}$$

对于 π 介子和核子的这种紧凑的"同位旋"标记法代表着纯粹地形式改变，并没有伴随着什么新的物理变化. 用一个虚构的"同位旋空间"的语言，我们可以设想 Ψ 像一个旋量一样变换，而 φ 像一个矢量一样变换. 于是，波动方程 (10.33) 和 (10.34) 在同位旋空间转动下两者都是协变的. 这个协变性是限制耦合项形式的一个后果，由于这个限制，质子与中子，荷电的与中性的 π 介子，分担着完全相同的相互作用，并在不出现电磁效应时是等价的. 相反地，我们可以把整个程序反过来并证明[1]：对于在同位旋空间转动下是不变的任何这种波动方程的集合，n-n，n-p，p-p 力在相应的态中是相等的.

正是怀着这个目的，即构成一种紧凑的语言，在其中质子和中子作为核子波函数 Ψ 的两个分量出现，我们才在上一节中制订了我们关于 Feynman 振幅的规则.

同位旋形式在数学上与三维角动量形式完全相同. 角动量守恒定律得自波动方程在普通三维空间转动下的协变性，用相同的方法，同位旋守恒定律得自 (10.33) 和 (10.34) 在同位旋空间中的协变性. 但是，同位旋守恒只是一个近似的定律，因为方程的对称性只是在忽略电磁耦合、忽略 p 与 n 之间、$\pi^{\pm}$ 和 π^0 之间的质量差之下才是有效的. 在这一近似下，介子和核子系统的态可以相对于总同位旋的平方 I^2 以及，比如说，同位旋第三分量 I_3（它与系统的总电荷相联系着）对角化. 核子波函数 (10.28) 在同位旋空间中像一个二分量旋量一样转动；因而指定核子的同位旋是二分之一单位，而其沿第三轴的分量对质子是 1/2，对中子是 $-1/2$. 介子波函数 (10.32) 像一个矢量一样转动，其第三轴投影对 π^0 为 0. 因

1) Wick，前已引用.

此，介子带有同位旋一个单位，$I=1$.

介子-核子散射可以按 $I=3/2$ 和 $I=1/2$ 两个同位旋道来讨论，一个介子和一个核子可以通过这两个道按照熟知的角动量相加规则耦合起来. 在核子-核子散射中，对于在电荷无关近似下的 p-p 和 n-n 散射，只有一个同位旋道 $I=1$ 是可用的. 对于 p-n 系统，$I_3=0$，从而散射可以通过 $I=0$ 道，也可以通过 $I=1$ 道. 我们将简短地用同位旋语言来讨论这些例子.

作为总结，我们列出在 (10.33) 和 (10.34) 的电荷无关相互作用之下，写出相应于这个模型中图的振幅的规则（比较 8.1 节）：

1. 画出所有的连通图.

2. 把每一个图与一个振幅联系起来，在每一个顶点有一个因子

$$-ig_0(i\gamma_5\tau_\alpha)\int d^4x$$

3. 对于每一根终止于 x 和 y 的内部核子线，振幅中包括一个传播子 $iS_F(x-y)1$，其中 1 是核子同位旋量的 2×2 维空间中的单位矩阵. 对于每一根内部介子线，振幅中包括一个传播子 $i\Delta_F(x-y)\delta_{\alpha\beta}$，其中 $\delta_{\alpha\beta}$ 是把在（被介子所连接的）顶点的算符 τ_α 和 τ_β 连结在一起的 3×3 单位矩阵.

4. 对于每一根外线，引进一个波函数. 对于核子线，对于分别具有同位旋波函数 $\chi_p=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 和 $\chi_n=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 的质子和中子，投影算符 $(1/2)(1+\tau_3)$ 和 $1/2\,(1-\tau_3)$ 是有用的. 例如，一个具有量子数 (p,s) 的入射中子波函数是

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{M}{E_p}}\,e^{-ip\cdot x}u(p,s)\chi_n=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}$$

$$\times \sqrt{\frac{M}{E_p}} e^{-ip\cdot x} u(p,s)\left(\frac{1-\tau_3}{2}\right)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (10.35)$$

对于介子线，波函数有一个同位旋因子 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$，这里 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ 是 π 介子的三维同位旋空间的一个单位矢量．用带电荷＋、－和 0 的介子的态来表示，根据 (10.32)，$\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ 具有分量：

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i, 0)$$

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i, 0) \qquad (10.36)$$

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}_0 = (0, 0, 1)$$

因而，在一个入射 π^+ 介子被吸收的顶点上，或者在一个末态 π^- 介子被发射(相应于一个沿时间逆向传播的负能量入射 π^+ 介子)的顶点上，如同在 (10.30) 一样，出现同位旋因子 $\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_1 + i\tau_2) = \sqrt{2}\,\tau_+$．对于发射一个末态 π^+ (或吸收一个入射 π^-)，这个因子是 $\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}_+^* = \sqrt{2}\,\tau_-$．

5. 由于在 10.2 节的末尾所做的约定，仅是通过互换两根核子线而拓扑地相区别的两个图，其所相应的两项之间必定有一个相对负号．对于每一个闭合的核子迴线，也有一个因子 -1，还有一个因子 $(-1)^{\bar{n}}$，这里 $\bar{n}$ 是初态中的反粒子数[见 (6.56)]．

在形成这个模型时，我们简单地模仿了电动力学．诸如 π- 核子相互作用的同位旋守恒等普遍的特征，在忽略微小的质量差及电磁效应的近似下，到其耦合的各阶都是普遍有效的．但是，相互作用的微扰展开成为 g_0 的一个幂级数并非普遍有用的，因为看来 $g_0^2/4\pi \approx 14$，并不像它的电磁类似 $\alpha \sim 1/137$ 那样小．其幂级数展开会导致一个发散射的、而不是收敛的微扰级数．

10.4 守恒流

按照同位旋记号(10.28)和(10.32)，流守恒的微分定律(10.23)取形式

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\bar{\Psi}\left(\frac{1+\tau_3}{2}\right)\gamma_\mu\Psi+\left(\boldsymbol{\varphi}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial x^\mu}\right)_3\right]=0 \quad (10.37)$$

这里矢量记号应用于同位旋空间. 通过对时间分量($\mu=0$)在全空间积分求得的守恒的总电荷是

$$Q=\int d^3x\left[\Psi^+\left(\frac{1+\tau_3}{2}\right)\Psi+(\boldsymbol{\varphi}\times\dot{\boldsymbol{\varphi}})_3\right] \quad (10.38)$$

由(10.33)直接得出的守恒定律是

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}J_\mu^N=\frac{\partial}{\partial x_\mu}\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi=\frac{\partial}{\partial x_\mu}(\bar{\phi}_p\gamma_\mu\phi_p+\bar{\phi}_n\gamma_\mu\phi_n)=0 \quad (10.39)$$

上式被确认为核子电荷守恒. 核子总电荷由下式给出

$$N=\int\Psi^+\Psi d^3x=\int(\phi_p^+\phi_p+\phi_n^+\phi_n)d^3x \quad (10.40)$$

且在这个模型中是一个常数，因为核子(质子+中子)的总数减去反核子的总数是守恒的. 这一点可以从图 10.4 和 10.5 中的 Feynman 图看出，因为一根连续的核子线以所有可能的时序通过每一个顶点. 把(10.40)引进(10.38)，给出

$$Q=\frac{N}{2}+I_3 \quad (10.41)$$

其中

$$I_3=\int d^3x[(1/2)\Psi^+\tau_3\Psi+(\boldsymbol{\varphi}\times\dot{\boldsymbol{\varphi}})_3] \quad (10.42)$$

被确认为是“同位旋”的第三分量. 从方程(10.33)和(10.34)在同位旋空间转动下的不变性，我们猜想，不仅 I_3，而且同位旋的所有三个分量都应该是守恒的. 通过构造，我们的确发现这是真实的. 守恒的同位旋流是

$$\boldsymbol{J}_\mu = (1/2)\bar{\Psi}\gamma_\mu\boldsymbol{\tau}\Psi + \boldsymbol{\varphi}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial x^\mu} \qquad (10.43)$$

而恒定的总同位旋是

$$\boldsymbol{I} = \int d^3x[(1/2)\Psi^+\boldsymbol{\tau}\Psi + (\boldsymbol{\varphi}\times\dot{\boldsymbol{\varphi}})] \qquad (10.44)$$

电荷、核子荷和同位旋的守恒，是以方程（10.33）和（10.34）为基础的理论的普遍特征．实际观察到[1] Q 和 N 两者在自然界中都是严格守恒的；另一方面，同位旋 I 只是在忽略电磁和弱相互作用的近似下才是守恒的．这些耦合破坏了强相互作用的电荷无关性（电荷无关性导致了（10.33）和（10.34）的对称形式，并因此导致（10.43）和（10.44）的对称形式），按照（10.41），只剩下第三分量 I_3 是严格守恒的．在守恒定律的这一讨论中，同位旋形式的用处已经是显然的，它容许我们更好地"看到"方程说些什么．

10.5 近似计算；核子-核子散射

为了同时阐明同位旋形式的应用，以及 π 介子与核子相互作用的一些普遍的物理特征，我们简短地考虑两个例子：对于核子-核子相互作用的单 π 介子交换贡献，和 π-核子散射．

我们所考虑的核子-核子散射 Feynman 图，图 10.1 和 10.3，现在可以全部合并成一个紧凑的形式．遵循我们的规则并和通常一样变到动量空间，给出散射振幅为

$$S_{fi} = \frac{(-ig_0)^2M^2}{(2\pi)^6\sqrt{E_1E_2E_1'E_2'}}(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_1'-p_2')$$

1）当把奇异粒子考虑在内时，N 必须推广到重子（N、Λ、Σ、Ξ 等）数减去反重子数．后来称它为重子数，在本书下卷《相对论性量子场》中将其标记为 B．

$$
\times \left\{ [\chi_1^{+}\bar{u}(p_1')i\gamma_5\boldsymbol{\tau}u(p_1)\chi_1] \frac{i}{(p_1'-p_1)^2-\mu^2} \right.
$$

$$
\cdot [\chi_2^{+}\bar{u}(p_2')i\gamma_5\boldsymbol{\tau}u(p_2)\chi_2] - [\chi_2^{+}\bar{u}(p_2')i\gamma_5\boldsymbol{\tau}u(p_1)\chi_1]
$$

$$
\left. \times \frac{i}{(p_2'-p_1)^2-\mu^2} \cdot [\chi_1^{+}\bar{u}(p_1')i\gamma_5\boldsymbol{\tau}u(p_2)\chi_2] \right\} \tag{10.45}
$$

比较（10.45）与电子-电子散射的（7.82），表明按照我们的规则有下列因子的对应

$$
e\gamma_\mu \rightarrow ig_0\gamma_5\boldsymbol{\tau}
$$

$$
g_{\mu\nu}D_F(k^2) \rightarrow \Delta_F(k^2)
$$

以 $(2\pi)^6$ 代替 V^2 来自外线过渡到了连续统归一化．对于 p-p 散射，同位旋因子变为

$$
(\chi_p^{+}\boldsymbol{\tau}\chi_p)\cdot(\chi_p^{+}\boldsymbol{\tau}\chi_p) = (\chi_p^{+}\tau_3\chi_p)(\chi_p^{+}\tau_3\chi_p) = 1 \tag{10.46}
$$

而且（10.45）的两项，如同在（10.7）和（10.8），相应于两个全同费密子的直接散射和交换散射；对于 n-n 散射，与此类似．对于 p-n 散射，同位旋因子对于第一项是

$$
(\chi_p^{+}\boldsymbol{\tau}\chi_p)\cdot(\chi_n\boldsymbol{\tau}\chi_n) = -1
$$

对于交换项是

$$
(\chi_n^{+}\boldsymbol{\tau}\chi_p)\cdot(\chi_p^{+}\boldsymbol{\tau}\chi_n) = +2
$$

从而散射振幅与 p-p 和 n-n 散射的振幅不同．但是，如果我们要想求到达由质子和中子构成的、$I=1$，$I_3=0$ 的对称同位旋态

$$
\frac{1}{\sqrt{2}}[\chi_p(1)\chi_n(2)+\chi_n(2)\chi_p(1)] \tag{10.47}
$$

的散射，(10.45)中的同位旋因子，不论是第一项还是第二项，都变为

$$
\frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_p^{+}\boldsymbol{\tau}\chi_p\cdot\chi_n^{+}\boldsymbol{\tau}\chi_n+\chi_n^{+}\boldsymbol{\tau}\chi_p\cdot\chi_p^{+}\boldsymbol{\tau}\chi_n)
$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{10.48}$$

散射振幅等于 $1/\sqrt{2}$ 乘以 p-p 和 n-n 的散射振幅，并在它们的空间变数的互换下是反对称的.

对于到 $I=0$、$I_3=0$ 的反对称同位旋态

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[\chi_p(1)\chi_n(2)-\chi_n(2)\chi_p(1)] \tag{10.49}$$

的散射，(10.45) 中的同位旋因子对于第一项是

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_p^+\boldsymbol{\tau}\chi_p\cdot\chi_n^+\boldsymbol{\tau}\chi_n-\chi_n^+\boldsymbol{\tau}\chi_p\cdot\chi_p^+\boldsymbol{\tau}\chi_n)=-\frac{3}{\sqrt{2}}$$

对于第二项是 $+3/\sqrt{2}$. 因此，散射振幅当在 p 和 n 的同位旋变数互换之下为反对称时，在 p 和 n 的空间(坐标和自旋)变数互换之下是对称的.

这些例子表明广义的不相容原理如何应用于 N-N 散射. 核子仅仅在同时互换它们的同位旋变数和空间变数之下是反对称的那些态中相互作用. 电荷无关近似把 p-p 和 n-n 散射振幅与处于对称同位旋态(10.47)、从而是在反对称空间态中相互作用着的 p-n 系统的振幅等同起来. 这个相等性是从(10.45)、(10.46) 和 (10.48) 得出的，当我们回忆到: p-p 和 n-n 总截面如同在 (7.81) 中一样，只是对半个相空间积分，以免对质子或中子计算两次；从而 1/2 补偿了 (10.48) 的 $(1/\sqrt{2})^2$.

在非相对论性极限下，(10.45) 中的旋量矩阵元简化为

$$\bar{u}(p_1',s_1')\gamma_5 u(p_1,s_1)\cong u^+(s_1')\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1')}{2M}u(s_1) \tag{10.50}$$

其中 $u(s_1)$ 代表一个二分量 Pauli 旋量；(10.50) 容易通过写出非相对论性极限下的旋量而加以验证. 在这个极限下，介

子传播子约化为汤川势的 Fourier 变换

$$\frac{1}{(p_1'-p_1)^2-\mu^2}\approx\frac{-1}{(\boldsymbol{p}_1'-\boldsymbol{p}_1)^2+\mu^2}$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\int d^3r\, e^{i(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_1')\cdot \boldsymbol{r}}\ \frac{e^{-\mu r}}{r}$$

并且看得出来 (10.45) 是(到 g_0^2 阶)来自一个势

$$V(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)=\frac{f^2}{\mu^2}(1-P_{ex})(\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2)(\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\nabla}_1)$$

$$\times(\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\boldsymbol{\nabla}_1)\frac{e^{-\mu|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|}}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|} \tag{10.51}$$

的散射振幅，其中

$$f^2=\frac{g_0^2}{4\pi}\left(\frac{\mu}{2M}\right)^2$$

而 P_{ex} 是交换中子与质子波函数的算符，从而提供了 (10.45) 的第二项. 两个核子，正如广义的不相容原理所要求的，必须处于一个在它们互换之下为反对称的态中；否则，$(1-P_{ex})$ 就破坏这个态. 对于处于 s 态的两个核子，在有限的距离 $r=|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|>0$ 之下，势是吸引的，这可以从 (10.51) 的角平均

$$V_s(r)=\int\frac{d\Omega_{12}}{4\pi}V(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)=\frac{f^2}{\mu^2}(1-P_{ex})$$

$$\times\frac{1}{3}\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2\left[\mu^2\frac{e^{-\mu r}}{r}-4\pi\delta^3(\boldsymbol{r})\right]$$

以及从观察上(这个在空间座标上是对称的状态，必定在自旋或者同位旋互换下是反对称的)看出. 因此，在一个 s 态

$$\langle(1/3)\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2\rangle_s=\langle(1/12)[(\boldsymbol{\tau}_1+\boldsymbol{\tau}_2)^2-6]$$

$$\times[(\boldsymbol{\sigma}_1+\boldsymbol{\sigma}_2)^2-6]\rangle_s$$

$$=(4/3)[T(T+1)-3/2]$$

$$[S(S+1)-3/2]=-1 \tag{10.52}$$

从而
$$V_s(r)=-2f^2\left[\frac{e^{-\mu r}}{r}-\frac{4\pi}{\mu^2}\delta^3(r)\right] \tag{10.53}$$

当对于这个简单计算作非静态修正时，δ-函数排斥势展布为一个短程的排斥力心相互作用. 单靠(10.53)自己不足以解释氘和低能散射参数. 这是不足为奇的，因为没有什么理由期望，散射的静态单介子交换近似是可靠的. 的确，由于大的耦合常数 $g_0^2/4\pi\sim 14$，来自包含更多介子的其他附加图的高阶贡献是重要的. 但是，已经表明，这些高阶贡献主要对于较小距离 r 作出贡献，而对于 $\mu r>1$ 则以 $e^{-n\mu r}$ 急骤降落，这里 n 是被交换的介子数[1].

因此，非常令人鼓舞，在核子-核子散射振幅角动量展开的高分波分析中，(10.45)或(10.51)正确地重现了被观察到的相移，当 $g_0^2/4\pi$ 被置为 $\approx 14(f^2=0.08)$，它与在介子-核子 p 波散射分析中的观察值一致.

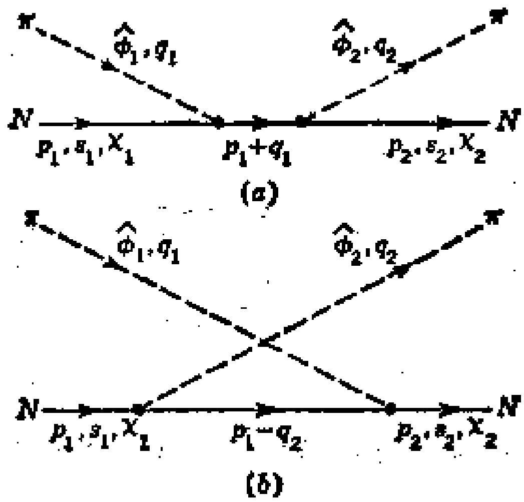


图 10.8 相应于方程(10.54)的最低阶介子-核子散射

1) 至于最近的评述和较早文献的出处，见 M. J. Moravcsik, *and* H. P. Noyes, *Ann. Rev. Nucl. Sci.*, **11**, 95 (1961).

10.6 介子-核子散射

图 10.8 的 Feynman 图描述介子对一个核子的散射，到 $g_0^2/4\pi$ 的最低阶. 按照我们的规则,散射振幅由下式给出

$$S_{fi} = \frac{1}{(2\pi)^6}\sqrt{\frac{M^2}{E_{p_1}E_{p_2}2\omega_{q_1}2\omega_{q_2}}}(2\pi)^4\delta^4(q_1+p_1-q_2-p_2)\mathfrak{M}$$

其中

$$\mathfrak{M} = (-ig_0)^2\chi_2^+\bar{u}(p_2,s_2)\left[\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}_2^* i\gamma_5\frac{i}{\not p_1+\not q_1-M}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1\right.$$
$$\left.+\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1 i\gamma_5\frac{i}{\not p_1-\not q_2-M}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}_2^*\right]u(p_1,s_1)\chi_1 \tag{10.54}$$

注意(10.54)的交叉对称性;它在互换

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1\longleftrightarrow\hat{\boldsymbol{\varphi}}_2^* \quad q_1\longleftrightarrow -q_2 \tag{10.55}$$

之下是不变的，它类似于 Compton 散射中在(7.67)发现的交叉对称性. 在(10.55)之下的这个对称性在所有更高阶中仍然保持着[1]. 从 Feynman 图清楚地看到这一点，当我们注意到：对于每一个如图 10.8a 的、入射的 π 在末态的 π 被发射之前就被吸收的图,存在着一个如图 10.8b 的图，差别仅在于入射的 π 在末态的 π 发射之后才被吸收.

我们将把我们的讨论限制在低能[2],在 $\mathfrak{M}$ 中只保留 $1/M$ 阶的 s-波散射项和 $1/M^2$ 阶的 p 波散射项. 把 Feynman 分母有理化,并借助于

$$\bar{u}(p')i\gamma_5(\not p+\not q+M)i\gamma_5 u(p) = \bar{u}(p')\not q u(p)$$

---

1) 在本书下卷中,正式证明了这一点.

2) E. M. Henley-*and* W. Thirring, "*Elementary Quantum Field Theory*", Mc Graw-Hill *Book Company, Inc.*, *New York*, 1962.

把 γ 矩阵约化，我们求得

$$\mathfrak{M}=-ig_0^2\chi_2^+\bar{u}(p_2,s_2)\left[\frac{(\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}_2')(\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1)q_1}{2p_1\cdot q_1+\mu^2}+\frac{(\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1)(\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}_2')(-q_2)}{-2p_1\cdot q_2+\mu^2}\right]u(p_1,s_1)\chi_1 \tag{10.56}$$

现在，在质心系中在上述的近似下做计算，我们把(10.56)简化为

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}\approx&\frac{-ig_0^2}{M}[u^+(s_2)u(s_1)(\chi_2^+\chi_1)(\hat{\boldsymbol{\varphi}}_2^*\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1)\\&-\frac{ig_0^2}{4M^2\omega}u^+(s_2)\chi_2^+(\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}_2^*\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{q}_2\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{q}_1\\&-\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}_2'\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{q}_2)u(s_1)\chi_1\end{aligned} \tag{10.57}$$

第一项是一个自旋及同位旋无关的相互作用，它可以用 Born 近似势

$$V(r)=+\frac{g_0^2}{2\mu M}\delta^3(\boldsymbol{r})-6f^2M\left[\frac{4\pi}{3\mu^3}\delta^3(\boldsymbol{r})\right] \tag{10.58}$$

而非相对论性地描述．在微扰论中，上式给出一个巨大的 s-波散射长度 $(4Mf^2/\mu)/\mu\approx 2/\mu\approx 2.8\times10^{-13}$cm，这里，我们如同在核子-核子相互作用的讨论中一样，已经置 $f^2=0.08$．但是，由于相互作用是排斥的和短程的——在这个非相对论性近似(10.58)中力程为零——它实际上只有非常小的效应．一个如图10.9所画出的，强的、短程的，排斥势产生一个数量级为 $\delta\sim qa$ 的 s 相移，这里势的力程 a，是低能散射长度．根据反冲修正，人们预期 $a\sim1/M$ 并且低能 s 波介子-核子散射是小的，这与 $\sim1/\mu$ 的大振幅相矛盾，后者是把 Born 近似不正当地应用于(10.58)而得到的．实验上发现情况确是如此[1]．

1) Bethe *and* De Hoffman, Jackson, Gell-Mann *and* Rosenfeld, 和 Henley *and* Thirring, 前已引用．

(10.57)的第二项是 p-波散射. 可以看出，它的形式与应用二阶非相对论性微扰理论所得到的一样. 如果我们把核子作为一个非相对论性的 1/2 自旋的粒子来处理，它在吸收初态介子和发射末态介子之间只以正能态传播，则我们就可以利用 (10.50) 把相互作用顶点约化为 $g_0(\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla)(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\phi})/2M$ 的形式. (10.57) 中的因子 $1/\omega$ 来自这一近似中的能量分母，对于图 10.8a 的振幅，它以正号出现，对于图 10.8b 的振幅，以负号出现. 与此相反，(10.57) 中的第一项，或 s 波散射项，却来自中间态时，核子在负能海内部或外部的跃迁. 在这种情况下，对于低核子动量 $\bar{v}\gamma_5 u\sim -1$，且能量分母给出一个因子 $-1/2M$.

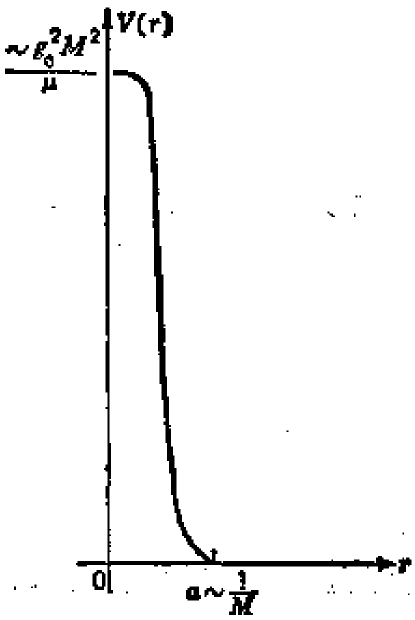


图 10.9 s-波 π-n 散射的短程排斥力

$\Delta E\cdot\Delta t\sim 1$ 形式的测不准关系意味着，经由这些图的 p 波相互作用发生在一个比 s 波的时间尺度 $\sim 1/M$ 较长的时间尺度 $\sim 1/\omega$ 上. 因此，自然地预期低能 p-波散射振幅较之 s 波更强的依赖能量. 事实上，如果有一个强的吸引的 p-波"势"，就可以呈现出共振.

提出来的决定性的问题是，正如 Chew[1] 所首先强调的，p 波势的符号是什么. 与写出 (10.57) 时我们的微扰近似在定量上的不适当无关，这个符号对于散射将会有极大的影响，

1) G. F. Chew, *Phys. Rev.*, **95**, 285 (1954).

从而它可以有效的定性的引导我们去了解 p 波振幅. 为了回答这个问题,特别方便的是对于不同的道(这些道相应于总角动量 J 和总同位旋 I 的每一个个别的值)投影出振幅来,因为根据角动量守恒,在 J 不同的道之间的跃迁是禁戒的,又根据同位旋守恒 (10.44)(在电荷无关近似下), 在 I 不同的道之间的跃迁也是禁戒的.

10.7 同位旋和角动量的投影算符

从角动量加法的矢量模式我们知道,一个核子(具有 $I=1/2$)和一个介子(具有 $I=1$)的系统的总同位旋是 $I=1/2$ 或者 $I=3/2$. 对这两个态 $P_{1/2}$ 和 $P_{3/2}$ 的投影算符是: 在由基 (10.36) 张成的介子同位旋空间中的 3×3 矩阵,和在核子同位旋量 (10.35) 的空间中的 2×2 矩阵. $P_{1/2}$ 和 $P_{3/2}$ 应该有投影算符的基本性质:

$$P_{1/2}+P_{3/2}=1 \tag{10.59a}$$

$$P_{1/2}^2=P_{1/2},\quad P_{3/2}^2=P_{3/2} \tag{10.59b}$$

这里 1 是在介子同位旋空间与核子同位旋空间的六维积空间中的单位矩阵.

寻找这些算符会变的容易起来, 如果注意到: 非交叉图(图 10.8a) 必定导致一个纯 $I=1/2$ 的振幅, 因为只有一个 $I=1/2$ 的单中间核子线,而 I 在每一个顶点上是守恒的. 因而非交叉图的同位旋矩阵必定正比于 $P_{1/2}$:

$$\langle\hat{\boldsymbol{\varphi}}_2|P_{1/2}|\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1\rangle=\alpha\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}_2^*\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1 \tag{10.60}$$

通过取 (10.60) 的平方并利用 (10.59b), 确定了系数 α 为 1/3:

$$\langle\hat{\boldsymbol{\varphi}}_2|P_{1/2}^2|\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1\rangle=\sum_{r=1}^{3}\langle\hat{\boldsymbol{\varphi}}_2|P_{1/2}|\hat{\boldsymbol{\varphi}}_r\rangle\langle\hat{\boldsymbol{\varphi}}_r|P_{1/2}|\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1\rangle$$

$$= \alpha^2 \sum_{r=1}^{3} (\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}}_2^*)(\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}}_r)(\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}}_r^*)(\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}}_1)$$

$$= 3\alpha \langle \hat{\boldsymbol{\varphi}}_2 | P_{1/2} | \hat{\boldsymbol{\varphi}}_1 \rangle = \langle \hat{\boldsymbol{\varphi}}_2 | P_{1/2} | \hat{\boldsymbol{\varphi}}_1 \rangle$$

或者 $\alpha = 1/3$ 且

$$\langle \hat{\boldsymbol{\varphi}}_2 | P_{1/2} | \hat{\boldsymbol{\varphi}}_1 \rangle = (1/3) \boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}}_2^* \boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}}_1 \qquad (10.61)$$

现在方程（10.59a）直接地给出 $P_{3/2}$:

$$\langle \hat{\boldsymbol{\varphi}}_2 | P_{3/2} | \hat{\boldsymbol{\varphi}}_1 \rangle = \hat{\boldsymbol{\varphi}}_2^* \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}}_1 - (1/3)(\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}}_2^*)(\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}}_1) \qquad (10.62)$$

幸而，角动量的合成与同位旋的合成是完全一样的，因为我们又是把自旋 $S = 1/2$ 耦合到 $L = 1$ 的介子 p-波轨道角动量． 现在 π 介子的轨道波函数是矢量 $\boldsymbol{q}_1$ 和 $\boldsymbol{q}_2$，类似于同位旋空间中的 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1$ 和 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_2$，而角动量投影算符，类似于（10.61）和（10.62），是

$$\langle \boldsymbol{q}_2 | Q_{1/2} | \boldsymbol{q}_1 \rangle = [(1/3) \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{q}_2 \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{q}_1] \frac{3}{4\pi q^2}$$

$$\langle \boldsymbol{q}_2 | Q_{3/2} | \boldsymbol{q}_1 \rangle = [\boldsymbol{q}_2 \cdot \boldsymbol{q}_1 - (1/3)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{q}_2)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{q}_1)] \frac{3}{4\pi q^2} \qquad (10.63)$$

其中 $q = |\boldsymbol{q}_1| = |\boldsymbol{q}_2|$.

它们按照

$$\int d\Omega_n \langle \boldsymbol{q}_2 | Q_i | \boldsymbol{q}_n \rangle \langle \boldsymbol{q}_n | Q_j | \boldsymbol{q}_1 \rangle = \delta_{ij} \langle \boldsymbol{q}_2 | Q_i | \boldsymbol{q}_1 \rangle \qquad (10.64)$$

归一化，式中，我们已经把在 $\boldsymbol{q}$ 空间中对三个垂直方向的求和（如同在同位旋投影算符中所用过的），换成了对一个球的积分 $\int d\Omega_n$. 这是在 P_i 和 Q_i 之间在归一化约定上的一个非本质的差别，是受到了下述事实的促使：被观察到的介子在同位旋空间中总是指向相应于电荷为 ±1 和 0 的三个方向（10.36）之一，反过来，它们的动量矢量却沿着相应于不同散射角的方向的一个连续统．

同位旋和角动量本征态的并合投影算符就是 P 和 Q 的乘积．我们定义它们为

$$\mathscr{P}_1 = \mathscr{P}_{11} = P_{1/2}Q_{1/2}$$
$$\mathscr{P}_2 = \mathscr{P}_{13} = P_{1/2}Q_{3/2}$$
$$\mathscr{P}_3 = \mathscr{P}_{31} = P_{3/2}Q_{1/2}$$
$$\mathscr{P}_4 = \mathscr{P}_{33} = P_{3/2}Q_{3/2} \tag{10.65}$$

其中 $\mathscr{P}_{ij}$ 的第一个指标刚好是同位旋的两倍，第二个指标刚好是角动量的两倍. $\mathscr{P}_\alpha$, $\alpha = 1, \cdots, 4$ 满足性质 (10.59) 以及归一化条件

$$\sum_{r=1}^{3}\int dQ_n \mathscr{P}_\alpha |\phi,q_n\rangle\langle\phi,q_n| \mathscr{P}_{\alpha'} = \delta_{\alpha\alpha'}\mathscr{P}_\alpha \tag{10.66}$$

把投影算符引进 (10.57)，对于 π-核子散射振幅，到 g_0^2 的第二阶并在我们模型的非相对论性近似下，求得

$$\mathfrak{M} \approx -\frac{ig_0^2}{M} u^+(s_2)u(s_1)\chi_2^+(P_{1/2}+P_{3/2})\chi_1 - \frac{ig_0^2}{4M^2}\left(\frac{4\pi q^2}{3}\right)$$
$$\times u^+(s_2)\chi_2^+\langle\hat{q}_2\hat{\phi}_2\left|\frac{9\mathscr{P}_{11}}{\omega} - \frac{4\mathscr{P}_{33}-2\mathscr{P}_{13}-2\mathscr{P}_{31}+\mathscr{P}_{11}}{\omega}\right|$$
$$\times \hat{q}_1\hat{\phi}_1\rangle u(s_1)\chi_1 \tag{10.67}$$

注意到在 (10.67) 中，散射振幅仅仅在 (3,3) 道是负的，相应于只对 $I = J = 3/2$ 为一个吸引势[1]. 实验上观察到在这个态中有一共振，而在其他三个 p-波态低能下相移很小，这与我们从一个导致 (10.67) 的“势”所能期待的结果定性地相一致.

10.8 π-核子散射截面

散射截面是从 (10.67) 和 (10.54)，通过取平方，并乘以通常的相空间因子而构成的. 对于固定的初自旋和末自旋，

1) 出处同上. 又见 G. F. Chew *and* F. E. Low, *Phys. Rev.*, **101**, 1570, 1579 (1956); G. C. Wick, *Rev. Mod. Phys.*, **27**, 339 (1955); 也见 Henley *and* Thirring, 前已引用.

我们有

$$d\sigma = \frac{|\mathfrak{M}|^2}{2\omega_{q_1}|\boldsymbol{v}_{q_1} - \boldsymbol{v}_{P_1}|}\int\left(\frac{M}{E_{P_1}}\right)\left(\frac{d^3q_2}{2\omega_{q_2}}\right)\left(\frac{M}{E_{P_2}}d^3P_2\right)$$

$$\times\frac{1}{(2\pi)^2}\delta^4(q_1 + P_1 - q_2 - P_2)$$

上式在非相对论极限$M \to \infty$下，在质心系中变为

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{c.m} \cong \frac{1}{16\pi^2}|\mathfrak{M}|^2 \qquad (10.68)$$

为了对一个特定的过程计算 $d\sigma/d\Omega$，把适当的 π 介子同位旋波函数 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_i$、动量 $\boldsymbol{q}_i$ 和相应的核子同位旋量 χ_i 代入$\mathfrak{M}$中。对于一个非极化的截面，照例对核子自旋求和。作为一个例子，我们考虑 π^+-p 散射，只有 $I = 3/2$ 道对这一过程有贡献，因为 $I_3 = 3/2$. 略去除 $I = J = 3/2$ 之外的所有贡献，从(10.65)我们有

$$\chi_p^+\langle\boldsymbol{q}_2\hat{\boldsymbol{\varphi}}_+|\mathscr{P}_{33}|\boldsymbol{q}_1\hat{\boldsymbol{\varphi}}_+\rangle\chi_p$$

$$= \frac{3}{4\pi q^2}(\boldsymbol{q}_2\cdot\boldsymbol{q}_1 - (1/3)\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{q}_2\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{q}_1) \qquad (10.69)$$

对末态核子自旋求和并对初态核子自旋求平均，借助(10.69)我们求得

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{自旋}}|\mathfrak{M}_{33}|^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{g_0^2}{4M^2}\right)^2\left(\frac{4}{\omega}\right)^2\sum_{\text{自旋}}\Big|u^+(s_2)$$

$$\times\left(\boldsymbol{q}_2\cdot\boldsymbol{q}_1 - \frac{1}{3}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{q}_2\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{q}_1\right)u(s_1)\Big|^2$$

$$= \left(\frac{g_0^2}{M^2\omega}\right)^2\frac{1}{2}T_r\left(\boldsymbol{q}_2\cdot\boldsymbol{q}_1 - \frac{1}{3}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{q}_2\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{q}_1\right)$$

$$\times\left(\boldsymbol{q}_2\cdot\boldsymbol{q}_1 - \frac{1}{3}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{q}_2\right)$$

$$= \left(\frac{g_0^2}{3M^2\omega}\right)^2 [q_2^2 q_1^2 + 3(q_2 \cdot q_1)^2] \qquad (10.70)$$

代入 (10.68)，我们求得，在质心系中，$I=J=3/2$ 对于 π^+-p 微分散射截面的贡献

$$\frac{d\sigma_{33}(\pi^+ - p)}{d\Omega} = \left(\frac{4f^2}{3\omega\mu^2}\right)^2 q^4(1 + 3\cos^2\theta) \qquad (10.71)$$

这里和以前一样，我们已经引进了

$$f^2 = \frac{g_0^2}{4\pi}\left(\frac{\mu}{2M}\right)^2$$

很难认为方程 (10.71) 是可靠的，因为它建立在 Born 近似的基础上，而正如已经看到的，Born 近似对于 s-波散射是严重失败的．但是，它有一个重要的好处，即预言了角分布是 $1+3\cos^2\theta$，对于介子能量在 150 到 200MeV 的区域，这与实验近似一致．此外，在这个能量区域，观察到几个截面的比值与计算值相近(只是对于 $I=J=3/2$ 道的散射)

$$\sigma(\pi^+\text{-}p \to \pi^+\text{-}p):\sigma(\pi^- - p \to \pi^0\text{-}n):\sigma(\pi^- - p \to \pi^- - p) = 9:2:1 \qquad (10.72)$$

利用这些启示—在这个能量区域中，散射主要地通过 $I=J=3/2$ 道—我们借助于两个普遍的观察[1]，来尝试扩大 (10.71) 的有效性．我们首先注意到，除了阈值附近之外，(10.71) 的能量依赖是不现实的，因为它预言了当 $\omega\to\infty$ 时 $\sigma\to\infty$．然而，却有一个来自么正性的、总截面大小的上限．纯粹地在传播子理论的框架之内，是难以讨论 S 矩阵的么正性的[2]；这里我们简单地利用非相对论性散射理论的一些普遍结果，即：

1．对于一个给定的道，散射振幅具有形式

1) Chew *and* Low, Wick 和 Henley *and* Thirring, 前已引用．

2) 关于这一讨论，见本书下卷．

$$t \propto \frac{1}{q} e^{i\delta} \sin\delta = \frac{1}{q(\cot\delta - i)} \tag{10.73}$$

其中 q 是各个粒子在质心系中的动量，δ 是在这个道中的相移.如果没有具有相同量子数的竞争的非弹性道，δ 是实的.

2. 一个具有轨道角动量 l 和总角动量 $J = l \pm 1/2$ 的道对总截面的贡献限制于

$$\sigma_{tot}^{l,J} \leqslant \frac{4\pi(2J+1)}{2} \frac{1}{q^2} \tag{10.74}$$

3. 有限力程展开

$$q^{2l+1}\cot\delta = a + b\omega + c\omega^2 + \cdots \tag{10.75}$$

在低能下提供了一个好的近似.

其次，我们注意到，正如在 10.6 节中已经指出的，p-波相互作用的小的能量分母 $\sim\omega$ 和相对地长的时间尺度 $\sim 1/\omega$，自然使人们预期 p-波散射相移有一个强的能量依赖性. 因此，对于(3,3)道的(10.75)，我们可以预料：对 Born 近似的高阶修正将导致一个不可忽略的、负的系数 c，从而提高了这个道中的 Born 近似引力.

利用(10.73)和(10.74)，我们把(10.71)重写为如下形式

$$\left(\frac{d\sigma_{33}}{d\Omega}\right)_{\pi^+-p} = \frac{1}{q^2} |e^{i\delta_{33}} \sin\delta_{33}|^2 (1 + 3\cos^2\theta) \tag{10.76}$$

且有

$$(e^{i\delta_{33}} \sin\delta_{33})_{\text{Born}} \cong + \frac{4f^2q^3}{3\omega\mu^2} \tag{10.77}$$

到这一阶，我们也可以写出

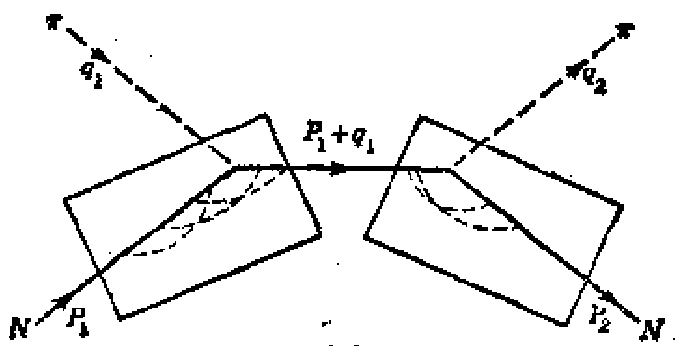
$$(q^3\cot\delta_{33})_{\text{Born}} = + \frac{3\omega\mu^2}{4f^2} \tag{10.78}$$

与(10.75)比较表明，Born 项在 $\omega \to 0$ 的奇异性质要求

$a=0$; 而且，系数 b 被确定为 $b=+(3\mu^2/4f^2)$. 为了决定展开式(10.75)中的下一个系数 c，并得出一个包括对于散射长度项的有效力程修正的公式，我们必须越出我们的低能 Born 近似计算.

我们已经特别提到，(10.67)引导我们预期对于(3,3)道有一个负系数 c，因为在这个道中相应于吸引势的符号与其他的道相反. 作为一个低能近似，写出

$$q^3\cot\delta_{33}=+\frac{3\omega\mu^2}{4f^2}\left(1-\frac{\omega}{\omega_r}\right) \tag{10.79}$$



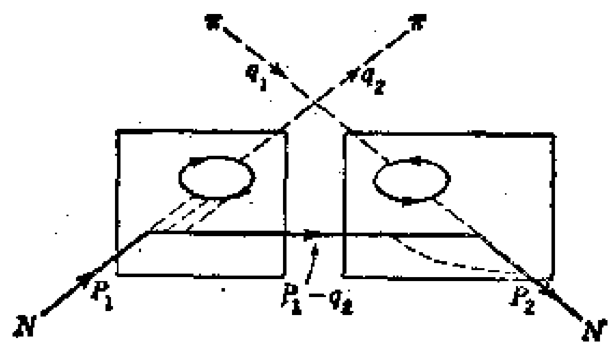


图 10.10 具有单中间核子线的辐射修正

只要令 $f^2=0.08$，或者等价地，$g_0^2/4\pi\approx 14$ 和 $\omega_r\approx 2.2\mu$，我们得到的结果便与 π^+-p 散射实验符合得很好.

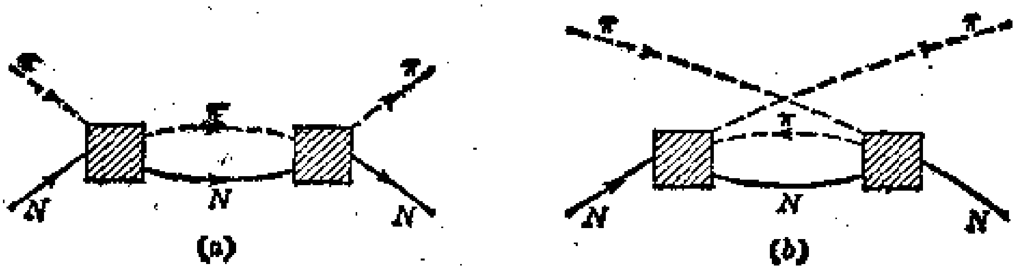


图 10.11 一个高阶贡献

方程 (10.79) 是 Chew 和 Low[1] 首先从介子理论推导出来的，在推导时利用了固定的核子源 ($\omega/M \to 0$)，而且没有依靠耦合常数的幂展开式，如同我们在 (10.54) 所做的。

散射振幅 (10.77) 在物理阈 $\omega = \mu$ 之下的"非物理区"中的点 $\omega = 0$ 处的奇异性，可以追溯到在 Born 振幅 (10.54) 中的趋于零的能量分母。这样，对于在实验室系统的介子能量 $\omega_1 = -\mu^2/2M$ 和 $\omega_2 = +\mu^2/2M$，(10.56) 中的有理化 Feynman 传播子具有简单极点；在非相对论极限 $\mu/M \to 0$ 之下，ω_1 和 $\omega_2 \to 0$。所有的在两个介子顶点之间仅有一根核子线传播的高阶图，如图 10.10，也将贡献以 $\omega = 0$ 为极点的一些项，而 (10.78) 和 (10.79) 在这一极点的留数包括了这些项的效应的总和。所有其他的图，诸如在图 10.11 所阐明的，其外介子线在能量 $\omega = 0$ 处是有限的，从而是对 (10.79) 的第二项，或有效力程项作出贡献[2]。通过画出 $(q^3\cot\delta_{33})/\omega$ 对 ω 的曲线并外推到 $\omega = 0$，我们把图 10.10 的振幅的贡献分离出来，这个振幅量度了一个 $P^2 = M^2$ 的物理核子吸收或者发射具有虚动量 $|q| = i\mu$ 的零能介子并留下一个具有

$$(P^2 + q^2) = M^2$$

---

1) Chew and Low，前已引用。

2) 这个陈述，从这些 Feynman 图看来是合理的，还可以普遍地加以证明。例如参看本书下卷。

的物理核子的强度．如 Chew 和 Low 所证实的，这个振幅就是介子-核子耦合常数，且有如外推程序所决定的数值 $f^2=0.08$[1]．

10.9 介子和核子的电磁结构

正如我们已经议论到的，介子与核子的电磁相互作用受到它们的强相互作用的影响．的确，人们早已知道，质子的磁矩具有异常大的值 $2.79\mu_B$，（这里

$$\mu_B=\frac{e\hbar}{2M_pc}$$

是 Bohr 核磁子），而不是 Dirac 方程对于荷电 e 的粒子，诸如电子，所预言的值 $1.0\mu_B$．（这里我们忽略在第七和第八章计算的电磁辐射修正）．类似地，中子具有磁矩 $-1.91\mu_B$，而自由 Dirac 方程则预言一个中性粒子的磁矩为零．

有可能放弃最小电磁耦合原理来解释这些反常磁矩[2]．不再是利用

$$i\nabla\!\!\!/ \rightarrow \gamma^\mu\left(i\frac{\partial}{\partial x^\mu}-eA_\mu\right) \tag{10.80}$$

把电磁相互作用引进到 Dirac 方程中去，我们还可以加上一个磁矩项

$$i\nabla\!\!\!/ \rightarrow \gamma^\mu\left(i\frac{\partial}{\partial x^\mu}-eA_\mu\right)-\frac{\kappa\mu_B}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{10.81}$$

而令 $\qquad \kappa_p=1.79 \quad \kappa_n=-1.91$

一个更富有成果的方法避免了如在（10.81）中引进新的参数的尝试，而仍保持了最小电磁相互作用的形式（10.80）．这个方法把所有对（10.80）的偏离，包括反常磁矩 κ，都归因

---

1) S. D. Drell, *Rev. Mod. Phys.*, **33**, 458 (1961).

2) Gell-Mann, 前已引用.

于强相互作用的影响[1]. 与我们在第八章中所见到的精神相同,通过把电子与光子的相互作用的效应包括进来,就能够在现在的实验的精确度的限制之内解释原子能级的 Lamb 移动和反常的电子磁矩.

无需涉及详细的计算而只依靠不变性的论证,我们便能够建立由强相互作用产生的对(10.80)的改正的普遍形式.在现在的例子中,Lorentz 协变性和电磁流守恒的要求严格地限制着一个粒子的电磁顶点. 先来考虑 π^+ 介子和图 10.12b 中的 Feynman 图,它是对图 10.12a 中的顶点的一个"辐射修正".

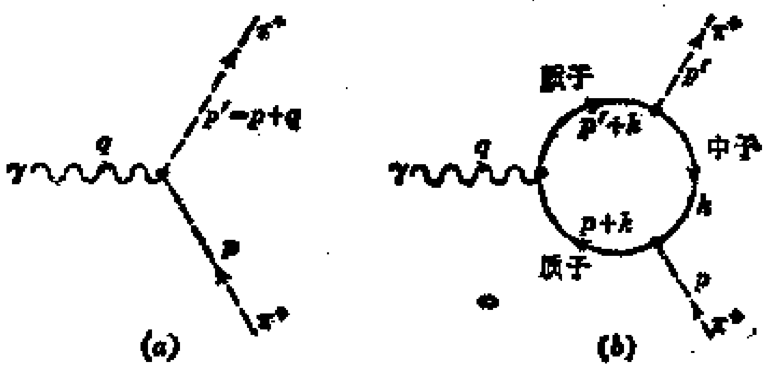


图 10.12 荷电 π 介子电磁顶点和辐射修正

按照我们的规则,在图 10.12a 的振幅中,由于图 10.12b 的 Feynman 图引起的对于 π^+ 电磁流的改正是

$$e(p_\mu + p'_\mu) \to e(p_\mu + p'_\mu) + (-ig_0\sqrt{2})^2(-1)$$
$$\times \int \frac{d^4\kappa}{(2\pi)^4} T_r \frac{i}{\not{k} - M} i\gamma_5 \frac{i}{\not{p}' + \not{k} - M} e\gamma_\mu$$

1) S. D. Drell and F. Zachariasen, "*Electromagnetic Structure of Nucleons*", *Oxford University Press, New York*, 1961. R. Hofstadter, "*Nuclear and Nucleon structure*", *W. A. Benjamin, Inc.*, 1963. L. Hand, D. G. Miller, and R. Wilson, *Rev. Mod. Phys*, **35**, 335 (1963). S. D. Drell, *Intern. School Phys.*, "*Enrico Fermi*," *Course* **XXVI**. *Varenna*, 1962 [*Academic Press*, 1964].

$$\times \frac{i}{\not{p} + \not{k} - M} i\gamma_5 = e(p_\mu + p'_\mu) + I_\mu(p', p)$$

(10.82)

积分 $I_\mu(p', p)$ 的数值并不很重要，因为它不过是 g_0^2 的幂级数展开式中的一项，而这个级数很可能是发散的．但是，这个对于 π^+ 电磁流的附加贡献在 Lorentz 变换下的变换方式却是重要的，因为它对于所有更高的阶也都是对的．明显的是，在 (10.82) 中，在取迹并做动量积分之后，$I_\mu(p', p)$ 以一个 Lorentz 4-矢量而变换，从而可以写为

$$I_\mu(p', p) = p_\mu f_1(p^2, p'^2, (p - p')^2) + p'_\mu f_2(p^2, p'^2, (p - p')^2) \qquad (10.83)$$

其中形状因子 f_1 和 f_2 是积分中三个独立的标量 p^2、p'^2 和 $(p - p'^2)$ 的标量函数．如果我们限制自己只注意于一个实介子对于一个电磁势的散射，则形状因子成为仅是不变动量转移 $q^2 = (p' - p)^2$ 的函数，因为这时 $p^2 = p'^2 = \mu^2$.

对 (10.83) 的进一步限制，例如，来自于流守恒的要求；对于一个实物理介子的流的第 q 级傅里叶分量

$$q^\mu I_\mu(p', p) = (p' - p)^\mu I_\mu(p', p) = 0 \qquad (10.84)$$

在 (10.83) 中，由于 $p^2 = p'^2 = \mu^2$，上式给出 $f_1(q^2) = f_2(q^2)$，这个结果可以用类似于第八章关于真空极化的讨论的方法—同时也以同一种类的不明确性—直接从 (10.82) 验明．

现在我们有了以动量转移 q^μ 散射的一个实 π^+ 介子的电磁流的普遍形式．点相互作用流 $e(p_\mu + p'_\mu)$ 被改为

$$e(p_\mu + p'_\mu) \to e(p_\mu + p'_\mu) F_\pi(q^2) \qquad (10.85)$$

其中 $F_\pi(q^2)$ 是荷 π 介子形状因子，且仅依赖于不变动量转移．在如同第八章那样实现了电荷重整化并令 e 等于 π^+ 的观察到的物理电荷之后，形状因子被归一化成在零动量转移之下为1，即 $F_\pi(0) = 1$．研究 $F_\pi(q^2)$ 要求比微扰论更为强

有力的计算技术[1]．在限制了一个 π^+ 介子被一个电磁场散射的微分截面的形式之后，(10.85)已经构成了一个强有力的结果．例如，直到 α 的最低阶，在不同的能量和散射角(但具有固定的 q^2) 的截面的比值是与 $F_\pi(q^2)$ 无关的，而且等于在第九章中忽略强相互作用所算出的比值．

在讨论核子(以及奇异超子)的电磁流的形状时，得到了类似的结果．这里核子的自旋自由度容许有两个标量形状因子的可能性，相应于一个 1/2 自旋粒子有一个磁矩的附加可能性．

例如，对于质子，我们遇到如图 10.13 所阐明的，到 g_0^2 阶的图．按照我们的规则，质子流的相应的修正是

$$
\begin{aligned}
\bar{u}(p')e\gamma_\mu u(p) \to\ & \bar{u}(p')e\gamma_\mu u(p) + (-ig_0\sqrt{2})^2 \\
& \times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\bar{u}(p')i\gamma_5 \frac{i}{\not p + \not k - M}\, i\gamma_5 u(p) \\
& \times \frac{i}{k^2 - \mu^2}\, e(2k_\mu + q_\mu) \frac{i}{(k+q)^2 - \mu^2} \\
& + (-ig_0)^2 \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4}\,\bar{u}(p')i\gamma_5 \frac{i}{\not p' - \not l - M}\, e\gamma_\mu \\
& \times \frac{i}{\not p - \not l - M}\, i\gamma_5 u(p)\, \frac{i}{l^2 - \mu^2} \\
=\ & \bar{u}(p')e\Gamma_\mu(p',p)u(p) \qquad (10.86)
\end{aligned}
$$

我们再次发现，如同对于 π^+ 流的情况那样，质子流像一个4-矢量那样变换．在做了动量积分之后，留下来夹在质子旋量之间的仅有的矢量是 p_μ，p'_μ 和 γ_μ．任何其他留下来的 γ 矩阵必须是 $\not p$，$\not p'$ 或 γ_5 的形式．但是，γ_5 矩阵可以排除，因为有偶数个 π-N 顶点，因此有偶数个 γ_5 因子，它们可以配起对

1) 更为令人满意的技术在本书下卷中讨论．

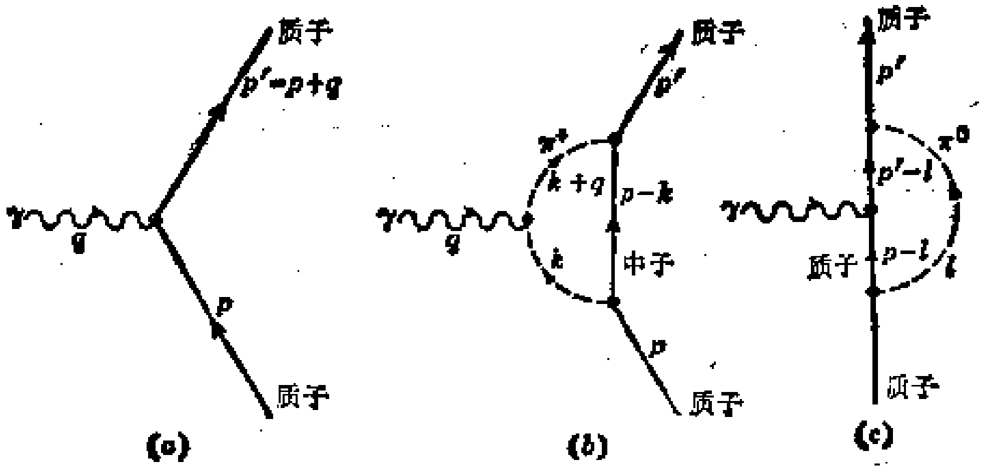


图 10.13　质子电磁顶点和辐射修正

来而 $\gamma_5^2=1$. 此外，所有出现在 γ 矩阵的乘积中的 p' 和 p 因子，可以反对易地调动到左边或右边，直到它们分别地与 $\bar{u}(p')$ 或 $u(p)$ 相邻，并置它们等于 M.（回忆第八章电子电磁顶点的计算中这一程序的具体例子）.

从这些论证我们得出结论，(10.86) 的一般结构必定是

$$\bar{u}(p')e\Gamma_\mu(p',p)u(p)=e\bar{u}(p')[p_\mu\Gamma_1(q^2)+p'_\mu\Gamma_2(q^2)+\gamma_\mu\Gamma_3(q^2)]u(p) \tag{10.87}$$

其中 $\Gamma_i(q^2)(i=1,2,3)$ 是 q^2 的标量函数. 对于中子流，完全相同的论证导致同样的一般形式.

流守恒给出三个形状因子 $\Gamma_i(q^2)$ 之间的一个关系. 类似于 (10.84)

$$q^\mu\bar{u}(p')\Gamma_\mu(p',p)u(p)=0$$

作为一个推论，$\Gamma_1(q^2)=\Gamma_2(q^2)$，从而核子流以

$$\bar{u}(p')e\Gamma_\mu(p',p)u(p)=e\bar{u}(p')[(p_\mu+p'_\mu)\Gamma_1(q^2)+\gamma_\mu\Gamma_3(q^2)]u(p)$$

为其最一般的形式.

在讨论核子的电磁结构时，通常的作法是利用流的

Gordon 约化消去矢量 $(p_\mu + p'_\mu)$ 而采用[1]

$$\sigma_{\mu\nu}(p'^\nu - p^\nu) = \sigma_{\mu\nu}q^\nu$$

因为旋量波函数 $\bar{u}(p')$ 和 $u(p)$ 服从自由 Dirac 方程，我们可以直接应用 (3.26) 来寻找等价的结构

$$\begin{aligned}&\bar{u}(p')e\Gamma_\mu(p', p)u(p)\\&= e\bar{u}(p')\left[\gamma_\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma_{\mu\nu}q^\nu}{2M}\kappa F_2(q^2)\right]u(p) \quad (10.88)\end{aligned}$$

这个形式我们从电子顶点的辐射修正的讨论中已经熟悉了。令 κ 等于用 Bohr 磁子量度的磁矩的反常部分（$\kappa_p = 1.79$ 和 $\kappa_n = -1.91$），并令 e 等于质子的物理电荷，则 $F_2(0) = 1$，对于质子 $F_1(0) = 1$，对于中子 $F_1(0) = 0$。

利用同位旋形式，我们可以把质子流和中子流组合成一个同位旋标量部分和一个同位旋矢量部分之和

$$\begin{aligned}&e\chi^+\bar{u}(p')\Big\{\gamma_\mu[F_1^{(s)}(q^2) + \tau_3F_1^{(v)}(q^2)]\\&\quad + \frac{i\sigma_{\mu\nu}q^\nu}{2M}[F_2^{(s)}(q^2) + \tau_3F_2^{(v)}(q^2)]\Big\}u(p)\chi\\&= \chi^+[j_\mu^{(s)}(p',p) + \tau_3 j_\mu^{(v)}(p',p)]\chi \qquad (10.89)\end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}F_1^{(s)} &= (1/2)(F_1^{(p)} + F_1^{(n)}) & F_1^{(s)}(0) &= 1/2\\F_1^{(v)} &= (1/2)(F_1^{(p)} - F_1^{(n)}) & F_1^{(v)}(0) &= 1/2\\F_2^{(s)} &= (1/2)(\kappa_p F_2^{(p)} + \kappa_n F_2^{(n)}) & F_2^{(s)}(0) &= -0.06\end{aligned}$$

---

1) 形状因子

$$G_E \equiv F_1 + \frac{\kappa q^2}{4M^2}F_2$$

$$G_M \equiv F_1 + \kappa F_2$$

具有更直接的几何解释，也有广泛的使用.（Hand, Miller, *and* Wilson, 前已引用）。

$$F_2^{(v)} = (1/2)(\kappa_p F_2^{(p)} - \kappa_n F_2^{(n)}) \quad F_2^{(v)}(0) = +1.85$$

对于质子，$\chi^+\tau_3\chi = 1$，从而(10.89)约化为质子流；对于中子，$\chi^+\tau_3\chi = -1$，从而(10.89)约化为中子流。

一般形式(10.88)或(10.89)再次为一个质子或一个中子对一个电磁势散射的微分截面提供了严格的限制。在 $\alpha = 1/137$ 的 Born 近似的准确度，对强耦合到任意阶，一个电子被一个物理质子或一个物理中子散射的截面，从(7.46)所算出的截面按照下式被修改

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2\left[\left(F_1^2 - \frac{\kappa^2 q^2}{4M^2} F_2^2\right)\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2}(F_1 + \kappa F_2)^2 \sin^2\frac{\theta}{2}\right]}{4E^2[1 + (2E/M)\sin^2(\theta/2)]\sin^4(\theta/2)} \tag{10.90}$$

其中 θ 是实验室散射角。可以通过比较在不同的散射角和散射能量下(但有相同的 q^2)所做的测量而分别决定 F_1 和 F_2。当画出

$$\left(\sin^4\frac{\theta}{2}\right)E^2\left(1 + \frac{2E}{M}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\frac{d\sigma}{d\Omega}$$

对于 $\cos^2\theta/2$ 的图象时(q^2 固定)，在相同的 q^2 之下两次以上的观察所给出的点必定全部落在同一直线上。对此直线的任何偏离不能归因于我们忽略了强耦合，或者归因于我们不能计算形状因子，而必须归咎于在电磁部分中计算的失败—也许是在 α 的幂级数中只保留第一项的近似的失败，或者有更加深刻的原因。

10.10 弱相互作用

弱相互作用[1]（β 衰变是它的最熟知的例子）可以分为两个普遍的组：轻子的和非轻子的．轻子相互作用包括 μ 介子（μ^-），电子（e^-）和两种中微子（ν, ν'），以及相应的反粒子相互作用（μ^+, e^+, $\bar{\nu}$, $\bar{\nu}'$），其中有

β 衰变 $$n \to p + e^- + \bar{\nu} \qquad (10.91a)$$

μ 衰变 $$\mu^- \to e^- + \nu' + \bar{\nu} \qquad (10.91b)$$

π 衰变 $$\pi^- \to \begin{cases} \mu^- + \bar{\nu}' \\ e^- + \bar{\nu} \end{cases} \qquad (10.91c)$$

μ 俘获 $$\mu^- + p \to n + \nu' \qquad (10.91d)$$

以及许多奇异数改变的轻子相互作用，这些相互作用把奇异粒子嬗变为核子、轻子，可能还有 π 介子；例如

$$K^- \to \begin{cases} \mu^- + \bar{\nu}' \\ \pi^0 + e^- + \bar{\nu} \end{cases}$$

$$\Lambda \to p + e^- + \bar{\nu}$$

非轻子衰变总是包含有奇异粒子，它们的例子是

$$\Lambda \to p + \pi^- \quad K^+ \to \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$$

我们将考虑不包含奇异粒子的轻子相互作用；包含奇异粒子的弱相互作用并没有充分了解，这里不讨论它们．在讨论（10.91a, b 和 c）时我们面临的问题是：从可利用的实验观察中推演出这些过程的Feynman图的相互作用顶点的结构来．

---

1) E. J. Konopinski, *Ann. Rev. Nucl. Sci.*, **9**, 99 (1959). L. B. Okun, XI *th Intern. Conf. High Energy Phys. CERN. Geneva* (1962). S. M. Berman, "*Lectures on Weak Interactions*", *CERN Seminars* (1961) (*CERN* 60—20); C. Fronsdal (*ed.*), "*Weak Interactions and Topics in Dispersion Physics*", W. A. Benjamin, *Inc.*, *New York*, 1963. Danby, Gaillard, Guilianos, Lederman, Mistry, Schwartz *and* Steinberger, *Phys. Rev., Letters*, **9**, 36 (1962).

在强相互作用的讨论中我们的主要依据中的两个在这里已不复存在．宇称守恒和同位旋守恒两者都是近似的对称性，在自然界中它们受到弱相互作用的破坏。

10.11 β 衰变

原子核中的 β 衰变是由基本过程 (10.91a) 所承担的，因此我们首先研究自由中子衰变．描写这一过程(在图 10.14 中阐明) 的 S 矩阵元的一般结构必须对于描写入射中子和出射粒子的波函数为线性的，也就是

$$S_{fi}^{(e^-)} = -i \sum_{\alpha\beta\gamma\delta=1}^{4} \int d^4x_1 \cdots d^4x_4 \phi_\alpha^{+(p)}(x_1) \phi_\beta^{(n)}(x_2) \phi_\gamma^{+(e)}(x_3) \times \phi_\delta^{(\nu)}(x_4) F_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, \cdots, x_4) \tag{10.92}$$

照例，厄米共轭波函数 ϕ^+ 代表出射粒子 (p, e^-) 或代表与沿时间逆向传播的负能解相对应的入射反粒子，而 ϕ 代表入射粒子 (n) 或出射反粒子 ($\bar\nu$)．从而，除了 β 衰变以外，所有的诸如

$$\nu + n \to p + e^-$$

等相互作用也包括在 (10.92) 之中。

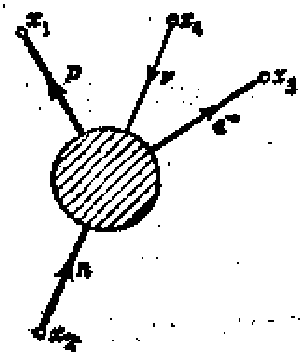


图 10.14 β 衰变

为了把逆 β 衰变、或正电子发射的可能性也考虑进去

$$p \to n + e^+ + \nu$$

如同在能量容许的核跃迁中所观察到的，就必须有一个类似于 (10.92) 的矩阵元

$$S_{fi}^{(e^+)} = -i \sum_{\alpha\beta\gamma\delta=1}^{4} \int d^4x_1 \cdots d^4x_4 \phi_\alpha^{+(n)}(x_1) \phi_\beta^{(p)}(x_2) \phi_\gamma^{+(\nu)}(x_3) \times \phi_\delta^{(e)}(x_4) \bar{F}_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, \cdots, x_4) \tag{10.93}$$

(10.92) 和 (10.93) 中的函数 F 和 $\bar{F}$ 必须根据实验来确定. 这里,我们在普遍理论的基础上,将只作一个假定,就是

$$\bar{F}_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2, x_3, x_4) = F^*_{\beta\alpha\delta\gamma}(x_2, x_1, x_4, x_3) \quad (10.94)$$

这个假定保证了弱相互作用下的细致平衡原理,并且告诉我们,除了相空间因子之外,反应

$$n \rightleftharpoons p + e^- + \bar{\nu} \qquad \nu + n \rightleftharpoons p + e^-$$

以相同的速率从右到左和从左到右进行[1]. 细致平衡 (10.94) 应能适用,这是根据 β 衰变相互作用的微弱性以及第八章中讨论过的 S 矩阵的么正性得出的. 在没有相互作用时, S_{fi} 约化为单位矩阵. 写成

$$S_{fi} = \delta_{fi} - iT_{fi}$$

T_{fi} 的么正性要求 (8.31) 是

$$i(T_{fi} - T^+_{fi}) = \sum_n T^+_{fn} T_{ni}$$

对于 β 衰变,右边比左边小得多,是弱耦合常数的第二阶. 这就导致 (10.94), 因为对于 $f \neq i$

$$S_{fi} = -iT_{fi}$$

中微子是一个无质量的中性 Dirac 粒子,我们通过把 β 衰变中电子的中性伴生粒子肯定为反中微子,而继续保留在实验上严格满足的轻子[数]守恒定律和核子[数]守恒定律. 对于过程 (10.91a), 这只是一个定义的问题; 但是对于 π 和 μ 衰变,轻子守恒有确定的含义. 实测的 β 衰变谱也表明中微子自旋为 1/2. 更新的对于 $\pi^- \to e^- + \bar{\nu}$ 衰变过程的观察进一步证实了这一点. 最后,中微子的零质量性质要求,我们对于中微子振幅的规一化约定要相对于其它费密子振幅有所改变. 我们写出具有量子数 (k, s) 的平面波解为

---

1) 在场论的语言中,这一点相应于在微扰方法中哈密顿量厄米性的假定.

$$\psi^{(\nu)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2E_k(2\pi)^3}} u^{(\nu)}(k, s) e^{-ik\cdot x} \qquad (10.95)$$

其中 $\qquad u^{+(\nu)}(k, s) u^{(\nu)}(k, s) = 2E_k$

因此 $\qquad \bar{u}^{(\nu)}(k, s) u^{(\nu)}(k, s) = 0$

中微子投影算符是

$$\Lambda^{(+)}_{\alpha\beta}(k, s) = \sum_{s=1}^{2} u_\alpha(k, s)\bar{u}_\beta(k, s) = \not{k}$$

$$\Lambda^{(-)}_{\alpha\beta}(k, s) = \sum_{s=1}^{2} v_\alpha(k, s)\bar{v}_\beta(k, s) = -\not{k}$$

处理归一化的一个方便的方法是：以和处理有限质量的电子完全相同的方法来处理中微子，如同在第三章中那样归一化，随后取极限 $m_\nu \to 0$。规则(10.95)导致完全相同的结果。

经过三十年的研究之后，(10.94) 中的函数 F 终于在低能，也就是在相对地大的坐标分离 $x_i - x_j$ 之下被完全地确定了下来。关于 F 的本性的最简单的假设是：它在大的时空分离 $x_i - x_j$ 之下为零。的确，如果 F 不为零的距离的范围小于 $\hbar/E_\beta c \sim 10^{-12}$cm (与 β 衰变能量 $E_\beta \sim 1$ 到 10MeV 相联系的特征距离)，我们可以在一级近似下取 F 为定域相互作用，也就是

$$F_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2, x_3, x_4) \approx \mathscr{F}_{\alpha\beta\gamma\delta}\delta^4(x_1 - x_2)\delta^4(x_1 - x_3)\delta^4(x_1 - x_4) \qquad (10.96)$$

其中 $\mathscr{F}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 是把诸旋量因子联结在一起的常数矩阵．实际表明，这是对于到目前为止的一切观察的一个极好的近似。对 (10.96) 作 Fourier 变换到动量空间，给出

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta\gamma\delta}(k_1, k_2, k_3, k_4) &= \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 \\ &\times e^{i(k_1\cdot x_1 + k_2\cdot x_2 + k_3\cdot x_3 + k_4\cdot x_4)} F_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &= (2\pi)^4\delta^4(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)\mathscr{F}_{\alpha\beta\gamma\delta} \qquad (10.97) \end{aligned}$$

这个相互作用恰好是一个常数矩阵乘以通常的、表达在相互作用顶点上能量-动量守恒的 δ 函数. 这是与交换 π 介子的核子-核子散射的情况大不相同的，在那里

$$F \sim \frac{1}{q^2 - \mu^2} \tag{10.98}$$

相应于力程 $\sim \hbar/\mu c$ 的势. 如果 π 介子的质量容许变成大的，我们就会在小的 q^2 之下接近一个类似于 β 衰变的情况，也就是，近似的四个费密子的点耦合. 反过来说，当在弱相互作用过程中牵涉到能量增加时，诸如在逆 β 衰变反应

$$\bar{\nu} + p \rightarrow n + e^+$$

之中，我们可以预期，相互作用将表现为非定域的；例如，在 p-n 系统和 e-ν 系统之间有可能交换一个可能的重玻色子 W^+，如图 10.15，或者可能发生某些更复杂的非定域过程[1].

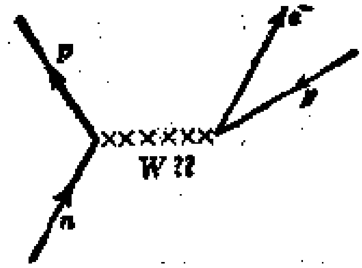


图 10.15 β 衰变中一个可能的重玻色子 $W^\pm$ 交换

对于现在的讨论，我们继续使用近似 (10.96) 和 (10.97). 在低能 β 衰变的领域内，可以忽略在修正值 $\sim|\mathbf{q}|/M$ 的范围内的核子反冲 (这里 $\mathbf{q}$ 是质子的反冲动量)，而 (10.92) 和 (10.93) 中的中子和质子波函数便用常旋量代替. 取平方，对非极化的中子和末态粒子做自旋求和之后，我们得到

$$\frac{|S_{fi}^2|}{VT} \propto \frac{1}{(2E_e)(2E_{\bar{\nu}})} \sum_{A,B} T_r(\not{p}_e + m)\Gamma^A \not{p}_{\bar{\nu}} \Gamma^B$$

1) T. D. Lee and C. N. Yang, *Phys. Rev.*, **119**, 1410 (1960); 汤川，前已引用.

$$\times (2\pi)^4\delta^4(p_e + p_{\bar{\nu}} + p_p - p_n) \tag{10.99}$$

这里 p_i 代表粒子 $i = (e, \bar{\nu}, p, n)$ 的 4-动量，而 E_i 是相应的能量；$E_p \approx M_p$，$E_n \approx M_n$. Γ_A 和 Γ_B 是一些依赖于矩阵 $\mathscr{F}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 的结构的复杂的矩阵. 因为它们仅是核子变数的函数，在中子的静止系中，它们是常矩阵. 因此，在求出迹 (10.99) 之后(这迹的一般形式一定是

$$AE_{\bar{\nu}} + BE_eE_{\bar{\nu}} + CE_eE_{\bar{\nu}}\boldsymbol{\beta}_e \cdot \hat{\boldsymbol{p}}_{\bar{\nu}}$$

其中 A, B 和 C 是常数. $\boldsymbol{\beta}_e = \mathbf{p}_e/E_e$, $\hat{\boldsymbol{p}}_{\bar{\nu}} = \mathbf{p}_{\bar{\nu}}/E_{\bar{\nu}}$)，我们求得到一给定末态的跃迁率为

$$\frac{|S_{fi}|^2}{VT} \propto \left(\frac{A}{E_e} + B + C\boldsymbol{\beta}_e \cdot \hat{\boldsymbol{p}}_{\bar{\nu}}\right)(2\pi)^4$$
$$\times \delta^4(p_e + p_{\bar{\nu}} + p_p - p_n) \tag{10.100}$$

现在我们可以乘上末态的相空间因子 $d^3p_ed^3p_{\bar{\nu}}d^3p_p$ 并对所有质子和中微子的动量求积分，以求出中子衰变中的电子谱

$$d\omega_e \propto d^3p_e\int d^3p_{\bar{\nu}}\delta(M_n - M_p - E_e - E_{\bar{\nu}})$$
$$\times \left(\frac{A}{E_e} + B + C\boldsymbol{\beta}_e \cdot \hat{\boldsymbol{p}}_{\bar{\nu}}\right) \propto p_eE_e(M_n - M_p - E_e)^2$$
$$\times \left(\frac{A}{E_e} + B\right)dE_e \tag{10.101}$$

这样，画出

$$\frac{1}{p_eE_e(M_n - M_p - E_e)^2}\frac{d\omega_e}{dE_e} \tag{10.102}$$

对于 E_e 的图象，我们应能发现一个能量依赖关系 $A/E_e + B$. 不仅在自由中子衰变中，而且在一大类称为容许跃迁的原子核 β 衰变中，已经观察到电子谱符合这个能量依赖关系[1].

1) 必须做 Coulomb 修正. E. J. Konopinski *and* L. M. Langer, *Ann. Rev. Nucl. Sci.*, **2**, 261 (1953).

而且，$A=0$，也就是在实验中观察到(10.102)是一个常数。显示数据的一个更为熟知的方法是利用 Kurie 图，它把

$$\left(\frac{1}{p_e E_e}\frac{d\omega_e}{dE_e}\right)^{1/2}$$

与E_e的关系表示为一条正比于$(M_n-M_p-E_e)$的直线．在(10.100)中与A/E_e成正比的一项不出现，这是β衰变相互作用的细节性质的后果，我们在下一段里考虑它；它是所谓"Fierz 干涉"项之一，这些干涉项引人注目地在所有观察到的β谱中均不出现，包括禁戒的β衰变跃迁在内，禁戒跃迁具有正比于核子速度的矩阵元，但是它们再次证实了β衰变相互作用的近似定域性．注意到以下一点是令人欣慰的：电子能谱(10.101)(其中$A=0$)简单地正比于相空间体积，并且具有(在(10.100)的中)由常数S矩阵元$S_{fi}\propto(2\pi)^4\delta^4(p_e+p_{\bar\nu}+p_p-p_n)$所预言的统计的曲线形状．

其次我们转到(10.97)中矩阵$\mathscr{F}_{\alpha\beta\gamma\delta}$的结构．在(10.92)中暂时保持指标$\gamma$和$\delta$固定，我们可以利用第二章讨论过的16个$\gamma$-矩阵，完全的普遍地概括了对$\alpha,\beta$的依赖性：

$$\mathscr{F}_{\alpha\beta\gamma\delta}=F^{(S)}_{\gamma\delta}1_{\alpha\beta}+F^{(P)}_{\gamma\delta}\gamma^5_{\alpha\beta}+\sum_{\tau=0}^{3}F^{(V)\tau}_{\gamma\delta}(\gamma_\tau)_{\alpha\beta}$$
$$+\sum_{\tau=0}^{3}F^{(A)\tau}_{\gamma\delta}(\gamma_5\gamma_\tau)_{\alpha\beta}+\sum_{\lambda\neq\tau=0}^{3}F^{(T)\lambda\tau}_{\gamma\delta}(\sigma_{\lambda\tau})_{\alpha\beta}$$

当把矩阵$1,\gamma_5,\gamma_\tau,\gamma_5\gamma_\tau$，和$\sigma_{\lambda\tau}$分别夹在 Dirac 解$\bar\psi(x)\cdots\psi(x)$之间时，它们依次构成标量$(S)$，赝标量$(P)$，矢量$(V)$，轴矢量$(A)$和二阶张量$(T)$，如同在(2.38)所见到的．于是，从(10.92)和(10.96)可以清楚：跃迁振幅的正规 Lorentz 不变性要求$F^{(S)}$和$F^{(P)}$应是1和γ_5的线性组合，$F^{(V)\tau}$和$F^{(A)\tau}$是γ^τ和$\gamma^\tau\gamma_5$的线性组合，$F^{(T)\lambda\tau}$是$\sigma^{\lambda\tau}$和$\sigma^{\lambda\tau}\gamma_5$的线性组合．从而$S$矩阵取形式

$$S_{fi}^{(e^-)} = \frac{1}{(2\pi)^6}\sqrt{\frac{m_p m_n m_e}{2E_{\bar{\nu}}E_pE_nE_e}}(2\pi)^4\delta^4(p_e+p_{\bar{\nu}}+p_p-p_n)\mathfrak{M}$$

且有

$$\mathfrak{M} = \sum_{i=SIVAT} C_i[\bar{u}_p(p_p)\Gamma_i u_n(p_n)]\{\bar{u}_e(p_e)[1+\alpha_i\gamma_5] \times \Gamma^i v_{\bar{\nu}}(p_{\bar{\nu}})\} \tag{10.103}$$

和

$$\Gamma_i = (1,\ \gamma_5,\ \gamma_\mu,\ \gamma_5\gamma_\mu,\ \sigma_{\mu\nu})$$
$$\Gamma^i = (1,\ \gamma_5,\ \gamma^\mu,\ \gamma^5\gamma^\mu,\ \sigma^{\mu\nu})$$

逆 β 衰变的 S 矩阵元取同样的形式，只是常数 C_i 和 α_i 要按照(10.94)换成其复共轭[1]，并且按照

$$\bar{u}_p\cdots u_n \to \bar{u}_n\cdots u_p$$
$$\bar{u}_e\cdots u_{\bar{\nu}} \to \bar{u}_\nu\cdots v_e$$

互换旋量的指标.

如果我们再次忽略核子旋量中一切对动量的依赖，从而把我们的注意力限制在"容许"跃迁，则(10.103)通过核子的二分量 Pauli 旋量简化为

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} \approx\ & (u_p^\dagger u_n)\{C_S\bar{u}_e(p_e)[1+\alpha_S\gamma_5]v_{\bar{\nu}}(p_{\bar{\nu}}) \\ & + C_V\bar{u}_e(p_e)[1+\alpha_V\gamma_5]\gamma^0 v_{\bar{\nu}}(p_{\bar{\nu}})\} \\ & + (u_p^\dagger\boldsymbol{\sigma}_T u_n)\cdot\{2C_T\bar{u}_e(p_e)[1+\alpha_T\gamma_5]\boldsymbol{\sigma}v_{\bar{\nu}}(p_{\bar{\nu}}) \\ & + C_A\bar{u}_e(p_e)[1+\alpha_A\gamma_5]\gamma_5\boldsymbol{\gamma}v_{\bar{\nu}}(p_{\bar{\nu}})\}\end{aligned} \tag{10.104}$$

前两行引起在核子态中的容许Fermi跃迁(S, V)，具有 $|\Delta \boldsymbol{S}| = 0$，后二行引起在核子态中的容许 Gamow-Teller 跃迁(A, T)，具有 $|\Delta \boldsymbol{S}| = 1$. 人们可以在原子核的 β 衰变(这里的跃迁在角动量确定的两态之间发生)中把容许 Fermi 跃迁从容许 Gamow-Teller 跃迁中分离出来；两者都对自由中子衰变有贡献.

---

1) 在一个符号之内 $\alpha_i \to +\alpha_i^*$ 当 $i = A, V$
$\alpha_i \to -\alpha_i^*$ 当 $i = S, P, T$

在 (10.104) 中一切正比于 $\alpha_i\gamma_5$ 的项都破坏宇称，因而在 1956 年李政道和杨振宁的工作以前都把这些项取消，以便不至于破坏在宇称运算下 S_{fi} 的不变性．在李政道和杨振宁的工作之后[1]实验上弱衰变中宇称破坏的发现，已导致在一系列关键实验[2]中完全确定所有的 α_i 和 C_i．

宇称破坏项的常数 α_i 是通过测量电子的纵向极化而确定的．确定这个极化的一个方法是测量 β 衰变电子对原子散射的左右不对称性．如同 (7.95)，我们定义极化为

$$P = \frac{N_R - N_L}{N_R + N_L}$$

其中N_R等于"右手"电子数，其自旋沿运动方向，且有 $\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle\cdot\hat{\boldsymbol{p}} = +1$，$N_L$ 等于"左手"电子数，$\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle\cdot\hat{\boldsymbol{p}} = -1$．不论是原子核的 Fermi 和 Gamow-Teller 跃迁，还是自由中子的衰变，在无反冲极限下且对中微子角积分之后，由下式给出的电子极化有很好的准确度．

$$P = -\frac{|\boldsymbol{p}_e|}{E_e} = -|\boldsymbol{\beta}_e| \qquad (10.105)$$

在 $\beta_e \to 1$ 的极限下，只发射左手电子．在同样极限下，一个左手电子的自旋投影算符如同(7.107)一样变为 $(1-\gamma_5)/2$，因此，一个左手电子的波函数是

$$\psi^{LH} = \frac{1-\gamma_5}{2}\psi \qquad \bar{\psi}^{LH} = \bar{\psi}\frac{1+\gamma_5}{2} \qquad (10.106)$$

因此，(10.104)中所有的 α_i 都等于 $+1$，以便重新产生正确的符号和正确的相对论性极限．通过把 (3.19) 和 (7.94) 引进 (10.99)，并算出迹和做出对中微子的角积分以得到所需要的 $-S^0m_e/E_e = -|\boldsymbol{\beta}_e|$，便求出了任意 β_e 下的极化．方程

1) T. D. Lee *and* C. N. Yang, *Phys. Rev.*, **104**, 254(1956).

2) Konopinski, Okun, Berman, Fronsdal 和 Danby 等人，前已引用。

(10.104) 现在简化为

$$\mathfrak{M} = (u_p^\dagger u_n)\bar{u}_e(p_e)(1+\gamma_5)(C_S + C_V\gamma_0)v_\nu(p_\nu) + (u_p^\dagger \boldsymbol{\sigma} u_n)\cdot \bar{u}_e(p_e)(1+\gamma_5)(2C_T\boldsymbol{\sigma} + C_A\boldsymbol{\gamma})v_\nu(p_\nu) \tag{10.107}$$

而常数 C_S, C_V, C_T 和 C_A 的相对大小仍待确定.

取$\mathfrak{M}$的平方和对自旋求和是一个简单的练习. 对于非极化核子,在 Fermi (S, V) 跃迁与 Gamow-Teller (A, T) 跃迁之间没有干涉项. 更进一步,在 (10.107) 中,在 S 与 V 之间,或在 A 与 T 之间也没有干涉项,因为这些耦合导致不同的反中微子末态. 当把因子 $(1+\gamma_5)$ 对调到右边时,我们看到 S 跃迁和 T 跃迁导致发射左手反中微子

$$v_\nu^{LH}(p_\nu) = \frac{1+\gamma_5}{2}v_\nu^{LH}(p_\nu)$$

另一方面,经由 V 和 A 的跃迁只发射右手反中微子. 在不出现 S 与 V 之间,或 A 与 T 之间的干涉时,就没有 Fierz 项;也就是,在 (10.100) 和 (10.101) 中的系数 A 为零. 对 A 的贡献来自如下形式

$$m_e \mathrm{Tr}\,\Gamma_A \not{p}_\nu \Gamma_B$$

的项. 如果在 Γ_A 中有偶数个 γ 矩阵,在 Γ_B 中就必须有奇数个 γ 矩阵,反之亦然;从而对于 Fierz 项的一切贡献都是干涉项,而正如我们已经看到的,这些干涉项为零. 如果中微子以小于百分之百的极化发射,不出现 Fierz 项要求的不是只包括 S 就是只包括 V 的项,以及不是 A 就是 T 的项. 然而,所有的四项都可能在 (10.107) 中出现,从而我们必须考虑一些测量(10.100) 中的系数 C 的实验,即测量电子-反中微子角关联的实验,以便得到更多的关于 C_S, C_V, C_A 和 C_T 的信息.

例如,考虑一个仅包括 S 和 V 贡献的纯 Fermi 跃迁. 对 (10.107) 中电子和反中微子的自旋变量求和,给出出射反中

微子相对于电子的角分布

$$N_{\text{Fermi}}(\theta)\propto Tr(\not{p}_e+m)(1+\gamma_5)(C_S+\gamma_0 C_V)\times \not{p}_{\bar{\nu}}(C_S^*+\gamma_0 C_V^*)(1-\gamma_5)$$
$$=8E_eE_{\bar{\nu}}[|C_S|^2(1-\beta_e\cos\theta)+|C_V|^2\times(1+\beta_e\cos\theta)] \tag{10.108}$$

其中 θ 是它们之间的夹角. 对于逆 β 衰变也求得同样的分布. 对于 A^{35} 的几乎纯粹的 Fermi 跃迁，通过测量正电子和反冲原子核的方向而确定的实验分布，发现近似地是 $1+\beta_e\cos\theta$，意味着跃迁是矢量的. 对于 Gamow-Teller 跃迁的一个类似的计算给出

$$N_{GT}(\theta)\propto E_eE_{\bar{\nu}}[|C_A|^2(1-(1/3)\beta_e\cos\theta)+4|C_T|^2(1+(1/3)\beta_e\cos\theta)] \tag{10.109}$$

而对一个纯粹 Gamow-Teller 跃迁(如在 Ne^{23}) 的测量，加上关于 Fermi 和 Gamow-Teller 混合跃迁的其它数据，表明 $|C_T/C_A|\ll 1$. 于是，在 $C_T/C_A=0$ 的极限下，方程(10.107) 可以简化为两项:

$$\mathfrak{M}\approx(u_p^\dagger u_n)\bar{u}_e(p_e)C_V\gamma^0(1-\gamma_5)v_{\bar{\nu}}(p_{\bar{\nu}})+(u_p^\dagger\boldsymbol{\sigma}u_n)\cdot\bar{u}_e(p_e)(+C_A\boldsymbol{\gamma})(1-\gamma_5)v_{\bar{\nu}}(p_{\bar{\nu}}) \tag{10.110}$$

上式只导致发射右手反中微子. 现在，只有 C_V 和 C_A 的大小

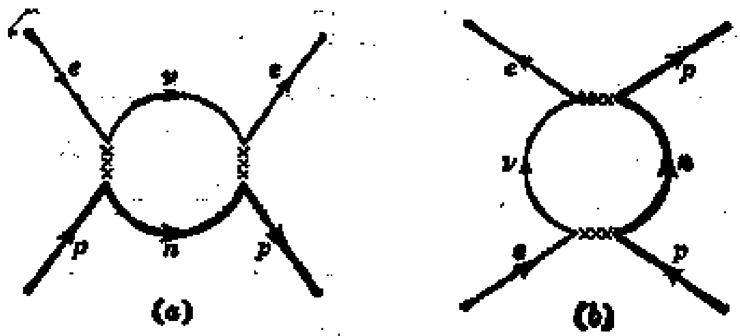


图 10.16 β 衰变的一些高阶图

和它们的相对位相尚待确定。它们的大小已从测量中子的衰变率和在 O^{14} 中的纯粹 Fermi 跃迁衰变率而求得。它们的相对位相是从测量极化中子的 β 衰变中，电子相对于中子自旋轴的角分布(它对于 V-A 混合是敏感的)而确定的。最后的结果是[1)]

$$\sqrt{2}\, C_V = (1.015 \pm 0.03) \times 10^{-5} \frac{1}{M_p^2} = G$$

$$\begin{aligned} C_A &= (+1.21 \pm 0.03) C_V \\ &= +\alpha C_V \end{aligned} \tag{10.111}$$

把 (10.111) 的记号代入到 (10.100) 并回复到相对论性记号，我们得到 β 衰变的不变振幅为

$$\mathfrak{M} = \frac{G}{\sqrt{2}} [\bar{u}_p \gamma_\mu (1 - \alpha\gamma_5) u_n][\bar{u}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v_\nu] \tag{10.112}$$

把$\mathfrak{M}$看做一阶相互作用振幅，并研究如图 10.16 的 Feynman 图所阐明的高阶效应，这样做是自然的。但是，在定域相互作用的近似 (10.96) 中，我们不知道如何计算这些振幅。这些图中的闭合迴线产生无穷大贡献，这些无穷大贡献不能像第八章中那样被分离并孤立到重正化常数中去。这里的困难是由于在核子顶点与轻子顶点之间失去 Bose 传播子而产生的，这些 Bose 传播子提供了在高动量的收敛性。定域近似 (10.96) 相当于以常数来代替传播子，如同在 (10.98) 中那样；这一点在要求对一切动量积分的闭合迴线计算中将不再是有效的。尽管我们是处理耦合常数 (10.111) 非常小的弱相互作用，这个高阶贡献问题却并不完全是空谈，因为对于诸如

---

1) 因子 $1/\sqrt{2}$ 是由于要追溯到 1956 年的历史原因而出现的，当时算出的衰变率在代入因子 $(1 - \gamma_5)$ 时增大了一倍。只有 C_V 和 C_A 的相对位相是由实验确定的。根据约定，C_V 选为实数而且是正的。

$$\bar{\nu} + p \to n + e^+$$

等散射过程，从(10.112)算出的截面随着能量的平方而增加[1]，并且正比于

$$G^2E_{c.m}^2 \sim \left(\frac{E_{c.m}}{300M_p}\right)^4 \frac{1}{E_{c.m}^2} \tag{10.113}$$

等到我们达到能量 $E_{c.m} \sim 300M_p \sim 300\text{BeV}$ 的时候，弱相互作用很可能增长成强相互作用，而非定域性效应和高阶图可能变得头等重要.

10.12 二分量中微子理论

我们已经指出过，在 β 衰变中只发射右手反中微子. 相应地，按照(10.94)，由于(10.112)中的 $(1-\gamma_5)$，在逆过程中只有左手中微子出现. 既然右手中微子和它们的左手反粒子在这些过程中，同样在一切弱相互作用过程中，都不出现，在无质量粒子的 Dirac 方程中它们便代表了一个不必要的、额外的自由度，我们尝试把它去掉.

无质量粒子的 Dirac 方程

$$i\frac{\partial \psi_\nu}{\partial t} = -i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\psi_\nu \tag{10.114}$$

不包含 β 矩阵，从而三个矩阵 α_1，α_2 和 α_3 的反对易关系

$$\{\alpha_i, \alpha_k\} = 2\delta_{ik} \quad \alpha_i^2 = 1 \tag{10.115}$$

可以用 2×2Pauli 矩阵来满足，也就是

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\sigma} \tag{10.116}$$

正是由于需要把 β 构成为第四个反对易矩阵，第一章中才被迫接受 4×4 矩阵.

1) B. Pontecorvo. *J. Exp. Theoret. Phys. (USSR)*, **37**, 1751 (1959); M. Schwartz, *Phys. Rev. Letters*, **4**,306 (1960) T. D. Lee *and* C. N. Yang, *Phys. Rev. Letters*, **4**, 307 (1960).

(10.114) 和 (10.116) 的正能平面波解具有形式

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2E(2\pi)^3}}u(p,s)e^{-i(Et-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})} \qquad (10.117)$$

其中 $E=|\boldsymbol{p}|$ 且旋量 $u(p,s)$ 满足方程

$$Eu(p,s)=\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}u(p,s) \qquad (10.118)$$

(10.118) 的解在通常的 Pauli 矩阵表象中，取 Z 轴的方向沿着 $\boldsymbol{p}$，是

$$u(p,+)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \qquad (10.119)$$

它描写自旋沿运动方向的右手中微子：

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E}u(p,+)=+u(p,+)$$

为了得到左手中微子，正如在自然界中已观察到的，我们必须在把 (10.115) 换成

$$\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\sigma} \qquad (10.120)$$

的情况下选取 (10.115) 的解．在这种情况下把 (10.118) 换为

$$Eu(p,-)=-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}u(p,-) \qquad (10.121)$$

从而我们有左手中微子

$$u(p,-)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \qquad (10.122)$$

为了更好地理解这些二分量解与现已熟悉的四分量电子旋量之间的关系，我们回到一个具有质量 m 的粒子的 Dirac 方程，并给 $\boldsymbol{\alpha}$，β 矩阵选取一个表象

$$\alpha_i=\begin{bmatrix}\sigma_i & 0\\0 & \sigma_i\end{bmatrix} \qquad \beta=\begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix} \qquad (10.123)$$

它与 (1.17) 相差一个么正变换

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \gamma_5\gamma_0)$$

在这个表象中，Dirac方程可以用一个分裂的二分量记号来表示，而以

$$\psi = \begin{bmatrix} u(+) \\ u(-) \end{bmatrix}$$

表达为

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}u(+) &= -i\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla u(+) - mu(-) \\ i\frac{\partial}{\partial t}u(-) &= +i\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla u(-) - mu(+) \end{aligned} \tag{10.124}$$

ψ 的上分量与下分量仅通过(10.124)中的质量项而混合；从而在 $m\to 0$ 的极限下，就导致相应于(10.114)的两个不耦合的二分量方程，一个象(10.116)那样 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\sigma}$，一个象(10.120)那样 $\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\sigma}$. 在表象(10.123)中

$$\gamma_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

从而容易看出，解

$$\psi(+) = \begin{bmatrix} u(+) \\ 0 \end{bmatrix} \quad 当\ m\to 0$$

相应于右手中微子，因为

$$\gamma_5\psi(+) = +\psi(+)$$

类似地

$$\psi(-) = \begin{bmatrix} 0 \\ u(-) \end{bmatrix} \quad \gamma_5\psi(-) = -\psi(-)$$

表明解 $\psi(-)$ 代表左手中微子.

通过一个二分量方程来描写无质量 Dirac 粒子的可能性

是在 1929 年 Weyl[1] 首先讨论的，但他没有认真地看待这件事，理由是在约化成二分量时，β 矩阵、从而 (2.32) 中的宇称算符 P，就已丧失．在 1956 年宇称垮台之后，Landau，李政道和杨振宁、Salam[2] 使 Weyl 方程又重新复活，他们注意到 (5.5) 和 (5.6) 的电荷共轭对称性 C 也已丧失，但是在 CP 之下的联合不变性却仍然保持．

按照 (5.5)，电荷共轭运算系由替换 $\phi(\boldsymbol{x},t)\rightarrow\phi_C(\boldsymbol{x},t)=C\beta\phi^*(\boldsymbol{x},t)$ 组成，其中 C 是满足 (5.4) 和 (5.6) 的矩阵．在新表象中，矩阵

$$C=-i\begin{bmatrix}\sigma_2 & 0\\ 0 & -\sigma_2\end{bmatrix}$$

满足这些条件．对于二分量中微子的情况，上述电荷共轭变换中 β 的出现意味着 C 不再是一个对称运算；但，联合运算 CP 却仍是．因为如果 $\phi(x)$ 是 (10.114) 的一个解，则

$$\phi_{CP}(\boldsymbol{x},t)=C\phi^*(-\boldsymbol{x},t)=\mp i\sigma_2\phi^*(-\boldsymbol{x},t) \tag{10.125}$$

也是 (10.114) 的一个解，因为

$$\begin{aligned}\left(i\frac{\partial}{\partial t}+i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}_x\right)\phi_{CP}(\boldsymbol{x},t)&=\mp i\sigma_2\\ &\times\left(i\frac{\partial}{\partial t}-i\boldsymbol{\alpha}^*\cdot\boldsymbol{\nabla}_x\right)\phi^*(-\boldsymbol{x},t)\\ &=\mp i\sigma_2\left[\left(-i\frac{\partial}{\partial t}-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{x'}\right)\phi(\boldsymbol{x}',t)\right]^*=0\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{x}'=-\boldsymbol{x}$．

为了构成反中微子波函数，我们取——就象在对于电子

---

1) H. Weyl, *Z. Physik*, **56**, 330(1929).

2) L. Landau, *Nucl. Phys.*, **3**, 127(1957); T. D. Lee *and* C. N. Yang, *Phys. Rev.*, **105**, 1671(1957); A. Salam, *Nuovo Cimento*, **5**, 299(1957).

的 (5.7) 和 (5.8) 中一样——一个负能中微子解，取波函数的复共轭，再乘以 $i\sigma_2$. 例如，对于左手中微子，在 $\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\sigma}$ 下 (10.114) 的一个负能解是(其中 $E=+|\boldsymbol{p}|$)

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2E(2\pi)^3}}v(-p,-)e^{+i(Et+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}$$

这里 $$-Ev(-p,-)=-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}v(-p,-)$$

和 $$v(-p,-)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \tag{10.126}$$

于是，按照 (10.125)，反中微子波函数是

$$\phi_{CP}(\boldsymbol{x}',t)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2E(2\pi)^3}}e^{-i(Et-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}')} \tag{10.127}$$

它显然也是左手 Weyl 方程的一个解. 现在 (10.127) 的确代表一个左手粒子，但这是在 $\boldsymbol{x}'=-\boldsymbol{x}$ 的宇称反射系统；正如一个使用右手的人在镜子中看来是使用左手一样，在带撇系统 (10.127) 中的左手反中微子，在不带撇系统中对我们来说就是右手的.

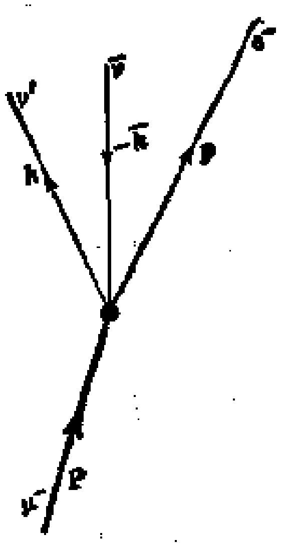


图 10.17 μ衰变

10.13 μ介子衰变

一个 μ 介子的衰变

$$\mu^-\to e^-+\nu'+\bar{\nu}$$

牵涉到四个费密子，包括 $(e^-,\bar{\nu})$. 这种与中子 β 衰变的类似性启示我们试用与 β 衰变相同形式的 S 矩阵元. 如同逆 β 衰变过程一样，μ^+ 衰变

$$\mu^+\to e^++\nu+\bar{\nu}'$$

的振幅将通过细致平衡给出. 我们再次如同在 (10.112) 那样把 $e^-\bar{\nu}$ 波函数配

对，假定耦合的形式是

$$\bar{u}_e(p)\gamma^\mu(1-\gamma_5)v_{\bar{\nu}}(\bar{k}) \tag{10.128}$$

这暗示着在 μ^- 衰变中为右手反中微子和完全左极化的电子(而在 μ^+ 衰 变中为右手正电子). 中微子极化是观察不到的，但是实验[1] 显示出 (10.128) 所预言的电子的完全左手极化。

于是，μ 衰变的 S 矩阵元取形式

$$S_{fi}=\frac{-i}{(2\pi)^6}\sqrt{\frac{m_\mu}{E_P}\cdot\frac{m_e}{E_p}\frac{1}{2E_k}\frac{1}{2E_{\bar{k}}}}(2\pi)^4\delta^4(P-p-k-\bar{k})\mathfrak{M}$$

$$\mathfrak{M}=\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{G}[\bar{u}_{\nu'}(k)\gamma^\mu(1-\lambda\gamma_5)u_\mu(P)][\bar{u}_e(p)\gamma_\mu \times(1-\gamma_5)v_{\bar{\nu}}(\bar{k})] \tag{10.129}$$

其运动学示于图 10.17.

参数 λ (它确定与 μ^- 介子相联系的 ν' 的极化)和耦合常数 $\tilde{G}$，有待于根据观察到的 μ 衰变率和 μ 衰变谱来确定.

为了从非极化粒子的 (10.129) 获得 μ^- 衰变的跃迁率，我们取 $|S_{fi}|^2$，乘以末态相空间因子 $d^3p d^3k d^3\bar{k}$，为了对自旋求和而插入投影算符，由于对 μ^- 自旋平均而除以 2，求每单位体积的跃迁率而除以 $VT=(2\pi)^4\delta^4(0)$，最后由于求每个 μ 介子的跃迁率而除以 μ^- 密度 $1/(2\pi^3)$. 这些步骤给出衰变率为

$$d\omega=\frac{1}{2(2\pi)^5}\frac{1}{2E_P}\int\frac{d^3p}{2E_p}\frac{d^3k}{2E_k}\frac{d^3\bar{k}}{2E_{\bar{k}}}$$

---

1) P. C. Macq, K. M. Crowe, *and* R. P. Haddock, *Phys. Rev.*, **112**, 2061(1958). 如要看近期的全面的评述可见 G. Feinberg *and* L. M. Lederman, *Ann. Rev. Nucl. Sci.*, **13**, 431(1963).

$$\times \delta^4(P-p-k-\bar{k})\sum_{\text{自旋}}|\mathfrak{M}|^2$$

其中

$$\sum_{\text{自旋}}|\mathfrak{M}|^2=\frac{\widetilde{G}^2}{2}\mathrm{Tr}[\gamma^\mu(1-\lambda\gamma_5)(\not{p}+m_\mu)\gamma^\nu(1-\lambda^*\gamma^5)\not{k}]$$

$$\times \mathrm{Tr}[(\not{p}+m_e)\gamma_\mu(1-\gamma_5)\bar{\not{k}}\gamma_\nu(1-\gamma_5)] \tag{10.130}$$

对于总积分速率，(10.130) 中 $(2E_P)^{-1}$ 右边的各个因子都是 Lorentz 不变的，从而我们看到，如狭义相对论所要求的，逆衰变率正比于能量 E_P. 在 μ 介子的静止系中，这就是寿命.

算出迹，我们得到

$$\sum_{\text{自旋}}|\mathfrak{M}|^2=32\widetilde{G}^2(1+|\lambda|^2)(k\cdot pP\cdot\bar{k}+k\cdot\bar{k}p\cdot P)$$

$$+\widetilde{G}^2(\lambda+\lambda^*)\mathrm{Tr}(\not{k}\gamma^\mu\not{P}\gamma^\nu\gamma_5)\mathrm{Tr}(\not{p}\gamma_\mu\bar{\not{k}}\gamma_\nu\gamma_5) \tag{10.131}$$

最后的迹产生一个标量，它对于 k 与 P 是反对称的，对于 $\bar{k}$ 与 p 是反对称的，且对于所有四个动量变数是线性的. 因此它具有形式

$$\mathrm{Tr}(\not{k}\gamma^\mu\not{P}\gamma^\nu\gamma_5)\mathrm{Tr}(\not{p}\gamma_\mu\bar{\not{k}}\gamma_\nu\gamma_5)$$

$$=a(k\cdot\bar{k}p\cdot P-k\cdot pP\cdot\bar{k}) \tag{10.132}$$

而且只有常数 a 是待定的. 我们暂时地随我们的方便选取矢量 $k,\bar{k},p,P$，只要求 (10.132) 不为零，这样来确定 a. 例如，令 $k_\mu=\bar{k}_\mu=(1,0,0,0)$ 和 $P_\mu=p_\mu=(0,1,0,0)$，(10.132) 变为

$$-a=\mathrm{Tr}(\gamma_0\gamma^\mu\gamma_1\gamma^\nu\gamma_5)\mathrm{Tr}(\gamma_1\gamma_\mu\gamma_0\gamma_\nu\gamma_5)$$

在对指标 μ 和 ν 求和时，只有两个组合 $\mu=2,\nu=3$ 和 $\mu=3,\nu=2$ 剩下来并且贡献相等，从而

$$-a = 2\mathrm{Tr}(\gamma_0\gamma_2\gamma_1\gamma_3\gamma_5)\mathrm{Tr}(\gamma_1\gamma_2\gamma_0\gamma_3\gamma_5) = +32$$

而(10.131)中的自旋和变为

$$\sum_{\text{自旋}}|\mathfrak{M}|^2 = 32\tilde{G}^2[|1-\lambda|^2 k\cdot\bar{k}p\cdot P + |1+\lambda|^2 k \cdot p\bar{k}\cdot P] \tag{10.133}$$

更进一步，我们对(10.130)中不观察的中微子变量做积分．因为$|\mathfrak{M}|^2$对于k和$\bar{k}$是线性的，这就导致我们计算积分

$$I^{\alpha\beta} = \int \frac{d^3k}{2E_k}\frac{d^3\bar{k}}{2E_{\bar{k}}} k^\alpha \bar{k}^\beta \delta^4(Q-k-\bar{k}) \tag{10.134}$$

其中 $Q = P - p$． 这个积分作为一个二秩 Lorentz 张量而变换，并且最好是在两个中微子的质心系（在那里Q是纯类时的）中计算．在这个系统中，经过简短的运算之后，我们求得

$$I^{\alpha\beta}_{(0)} = \frac{\pi}{24}Q_0^2[g^{\alpha\beta} + 2g^{\alpha 0}g^{\beta 0}]$$

知道了(10.134)是一个二秩的张量，我们现在可以在任意一个 Lorentz 系中把答案表达为

$$I^{\alpha\beta} = \frac{\pi}{24}[g^{\alpha\beta}Q^2 + 2Q^\alpha Q^\beta] \tag{10.135}$$

把(10.130)、(10.133)和(10.135)合在一起给出

$$d\omega = \frac{\tilde{G}^2}{192\pi^4}\frac{p\,dE_p d\Omega_p}{E_p}\{|1-\lambda|^2 6p\cdot P(m_\mu^2 + m_e^2 - 2p\cdot P) + |1+\lambda|^2[-4(p\cdot P)^2 + 3p\cdot P(m_\mu^2+m_e^2) - 2m_\mu^2 m_e^2]\}$$

对电子的角积分并略去电子静质量，即 $m_e/E_p \to 0$，给出在μ^-静止系中电子的能量分布

$$\left(\frac{d\omega}{dE_p}\right)^0 = \frac{\tilde{G}^2 m_\mu^2 E_p^2}{48\pi^3}\left[|1-\lambda|^2 6\left(1-\frac{2E_p}{m_\mu}\right)\right.$$

$$+ |1+\lambda|^2\left(3-\frac{4E_p}{m_\mu}\right)\Big] \qquad (10.136)$$

观察到的能量分布以好的准确度支持 $\lambda=+1$，也就是，在 (10.129) 中与 μ^- 介子相联系的中微子也是左手的[1]. 在 (10.136) 中置 $\lambda=1$，并对所有的电子能量 $0<E_p\leqslant 1/2m_\mu$ 积分，给出总的 μ 衰变率为

$$\omega^0=\frac{1}{\tau_\mu}=\frac{\tilde{G}^2m_\mu^5}{192\pi^3} \qquad (10.137)$$

从观察到的

$$\tau_\mu=(2.21\pm 0.003)\times 10^{-6}\text{秒},$$

推演出的 $\tilde{G}$ 值，在百分之二(1)的准确度内，等于原子核 β 衰[2] (10.111) 中的矢量耦合常数 $G=\sqrt{2}\,C_V$. 根据这个强有力的暗示，即在费米子之间的弱 β 衰变耦合是普适的. 我们描划了这里所给出的相互作用描述的新的支持，再注意其他含有轻子对 (e^-,ν) 或 (μ^-,ν') 的过程，看看他们是否也暗示着 $V-A$ 耦合形式 (10.128).

10.14 π 介子衰变

在书写 π 介子衰变 (10.91c) 的 S 矩阵元时，我们可以乐观地再次从 β 衰变和 μ 衰变中已经用得非常好的 $V-A$ 耦合 (10.128) 开始. 在这个进展中，我们得到两个实验发现的有力支持. 第一，观察到在衰变 $\pi^-\to\mu^-+\bar{\nu}'$ 中 μ^- 介子是纵向极化的和右手的. 于是，因为 π^- 自旋为零，反中微子也必须是以右手极化而被发射的. 在 π^- 的静止系中，μ^- 和 $\bar{\nu}'$ 以相

---

1) $\lambda=+1$ 之下 (10.136) 的能量依赖关系相应于一个 Michel 参数 $\rho=3/4$. L. Michel. *Proc. Phy. Soc.*, (*London*), **A63**, 514(1950).

2) R. P. Feynman *and* M. Gell-Mann, *Phys. Rev.*, **109**, 193 (1958). S. M. Berman *and* A. Sirlin, *Ann. Phys.* (*N. Y.*), **20**, 20(1962).

等而相反的动量射出，而且，如果它们沿发射方向的角动量按照角动量守恒的要求互相抵消的话，两者必须同时是右手的或者是左手的．这个观察与(10.128)一致，它预言只发射右手反中微子(或在 π^+ 衰变中，左手中微子)．

支持(10.128)的第二个实验发现是，观察到的分支比的数值非常小

$$R\left(\frac{\pi\rightarrow e+\nu}{\pi\rightarrow\mu+\nu'}\right)=1.3\times10^{-4} \qquad (10.138)$$

电子发射率的非常强烈的压低是(10.128)所预言的，是由于它的因子$(1-\gamma_5)$(它导致完全极化的左手中微子和右手反中微子)．把$(1-\gamma_5)$反对易地调动到左边，给出 $\bar{u}(p)(1+\gamma_5)$，相应于在 $v_e/c\rightarrow1$ 的极限下只发射左手电子(或右手正电子)．但是，正如上面已经注意到并在图 10.18 所阐明的，角动量守恒却要求在 π^- 衰变中右手电子伴随右手反中微子．因此，从(10.128)算出的跃迁率以一个因子

$$1-\left(\frac{v_e}{c}\right)^2\cong\left(\frac{2m_e}{\mu}\right)^2$$

被压低，这里 μ 是 π 介子质量，代表右手电子被发射的几率．对于以能量

$$E_\mu=\frac{\mu^2+m_\mu^2}{2\mu}=1.04m_\mu$$

被非相对论性地发射的、较重的 μ 介子，自旋投影算符与$(1\pm\gamma_5)$相差相当大，从而没有可以觉察的压低因子．

于是，我们选取(10.128)作为在 π 衰变 S 矩阵元中的轻子项，并寻找一个 4 矢量或轴矢量，用它来与(10.128)相乘以构成不变的跃迁幅．因为 π 介子没有自旋，这个矢量必须由在衰变中的两个独立的动量 4 矢量，P_μ(对于 π)和 $\bar{k}_\mu$(对于 $\bar{\nu}$)，构成，如图 10.19 所阐明的．$\bar{k}_\mu$ 将没有贡献，因为

$\bar{k}v_{\bar{\nu}}(\bar{k})=0$. 因此，$\pi$ 衰变的 S 矩阵元的结构是唯一的，并且可以写为

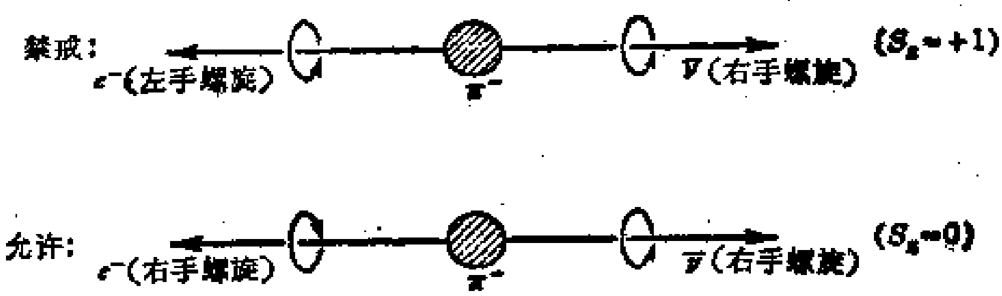


图 10.18 π 衰变中的自旋守恒，表明 e^- 和 $\bar{\nu}$ 两者都是右手的.

$$
\begin{aligned}
S_{fi}^{(\pi)}=&\frac{-i}{(2\pi)^{9/2}}\sqrt{\left(\frac{1}{2E_P}\right)\left(\frac{m_e}{E_p}\right)\left(\frac{1}{2E_{\bar{k}}}\right)}\frac{Ga}{\sqrt{2}}iP^{\mu}\\
&\times[\bar{u}(p)\gamma_{\mu}(1-\gamma_5)v_{\bar{\nu}}(\bar{k})](2\pi)^4\delta^4(P-p-\bar{k})
\end{aligned}
\tag{10.139}
$$

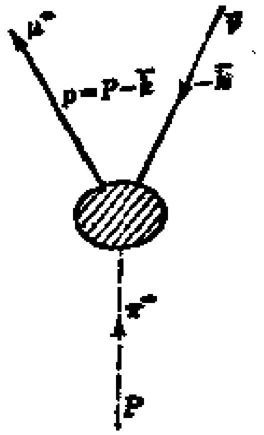


图 10.19 π 衰变

常数 G 是 β 衰变常数(10.111)，而确定 π 介子总衰变率的常数 a 对于 μ^- 衰变模和 e^- 衰变模可以不同.

重复类似的(但较简单)步骤(10.130)至(10.137)，我们求得衰变率为

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\tau_{\pi}}=&\frac{(2\pi)^3}{(2\pi)^5}\left(\frac{1}{2\mu}\right)\frac{G^2|a|^2}{2}8\int\frac{d^3\bar{k}}{2E_{\bar{k}}}\\
&\cdot\frac{d^3p}{2E_p}[2p\cdot P\bar{k}\cdot P-\bar{k}\cdot pP^2]\\
&\times\delta^4(P-\bar{k}-p)=\frac{G^2|a|^2}{8\pi}\mu^3\cdot\left(\frac{m}{\mu}\right)^2\left(1-\frac{m^2}{\mu^2}\right)^2
\end{aligned}
\tag{10.140}
$$

其中 m 是发射的电子或 μ 介子的质量.

如果常数 a 对于 π 介子的电子衰变模和 μ^- 介子衰变模两者都是相同的，则(10.140)预言一个分枝比

$$R\left(\frac{\pi\to e+\nu}{\pi\to\mu+\nu'}\right)=\left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2\frac{(\mu^2-m_e^2)^2}{(\mu^2-m_\mu^2)^2}=1.23\times10^{-4}$$

在误差为5%的量级之内与观测值(10.138)相一致. 这是对于耦合(10.128)的进一步的有力的支持，它普遍地适用于一切轻子衰变. 如果没有在 V-A 相互作用中对左手中微子和右手反中微子的严格的选择定则，这个小得出奇的分枝比就会被一个大得多的、更接近于相空间比

$$\frac{(\mu^2-m_e^2)^2}{(\mu^2-m_\mu^2)^2}\approx 5.5$$

的分枝比所代替. 从观察到的 π 介子的寿命 $\tau=(2.55\pm0.03)\times10^{-8}$ 秒，我们算出(10.140)中的常数

$$|a|\cong 0.93\mu \tag{10.141}$$

有了一切轻子衰变有一个普适耦合(10.128)的假定，由 π 介子衰变出来的 μ 介子的极化就确定了. 这会唯一地预言 μ 衰变谱的一个反对称参数，这个反对称参数把在衰变链

$$\begin{array}{l}\pi^-\to\mu^-+\bar\nu'\\ \qquad\ \ \lfloor\!\!\to e^-+\bar\nu+\nu'\end{array}$$

中的衰变电子的方向与 μ-介子自旋的方向关联起来. 我们来计算这个参数，首先计算出射到一个给定立体角元的 μ 介子的极化，然后计算从这些 μ 介子出来的衰变电子谱.

为了计算在 π 衰变中的 μ 介子极化，我们回到(10.139)并计算衰变到一个给定自旋极化 s 的态的微分衰变率. 如同在(7.89)和(7.90)那样引进自旋投影算符 $(1+\gamma_5\not s/2)$，以使我们能够利用迹技巧，从而，代替(10.140)，我们得到

$$d\omega_{\pi,s}=\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{2E_p}\frac{G^2|a|^2}{2}\int\frac{d^3\bar k}{2E_{\bar k}}\frac{d^3p}{2E_p}$$
$$\times 2\mathrm{Tr}\left[(\not p+m_\mu)\left(\frac{1+\gamma_5\not s}{2}\right)\not p(1-\gamma_5)\bar{\not k}\not p\right]$$

$$\times \delta^4(P - p - \bar{k}) = \frac{G^2|a|^2}{4\pi^2}\left(\frac{\mu}{E_p}\right)\mu^3$$

$$\times \left(\frac{m_\mu}{\mu}\right)^2 \int \frac{d^3p}{E_p} \delta[(P-p)^2]\left\{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{m_\mu^2}{\mu^2}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{m_\mu s \cdot P}{\mu^2}\right\} \tag{10.142}$$

P 和 p 分别是 π 和 μ 的 4-动量. 对于一个正螺旋性的右手 μ^- 介子，也就是，根据方程 (7.94)，对于

$$s_R \cdot P = \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{m_\mu}\left(1 - \frac{m_\mu^2}{\mu^2}\right)$$

衰变率是一个极大. 对于一个具有 $s_L = -s_R$ 的负螺旋性的 μ 介子，衰变率为零.

对于具有一个给定自旋极化 s 的 μ 介子的衰变率，我们回到 (10.129) 并重复那个计算：代入测量定出的 $\lambda = +1$ 并略去电子静止质量，$m_e/E_p \to 0$. 自旋投影算符 $(1 + \gamma_5 \not{s})/2$ 又使我们能够在计算矩阵元的平方时利用迹技巧. 重溯直到 (10.133) 的诸步骤，我们求得

$$\sum_{\text{电子自旋}} |\mathfrak{M}|^2 = \frac{\tilde{G}^2}{2} \mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu(1-\gamma_5)\left(\frac{1+\gamma_5\not{s}}{2}\right)(\not{P} + m_\mu)\right.$$

$$\left.\times \gamma^\nu(1-\gamma_5)\not{k}\right]\mathrm{Tr}[\not{p}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\not{\bar{k}}\gamma_\nu(1-\gamma_5)]$$

$$= 64\tilde{G}^2 k \cdot p \bar{k} \cdot (P - m_\mu s)$$

对观测不到的中微子变量的积分完全象 (10.135) 一样实行，给出

$$d\omega_s = \frac{\tilde{G}^2}{48\pi^4}\frac{p dE_p d\Omega_p}{E_p}\{-4(p\cdot P)^2 + 3m_\mu^2(p\cdot P)$$

$$- m_\mu s \cdot p[m_\mu^2 - 4(p \cdot P)]\}$$

在 μ 静止的系统里上式约化为

$$d\omega_s^0 = \frac{\tilde{G}^2}{48\pi^4} m_\mu^2 E_p^2 dE_p d\Omega \left[\left(3 - 4\frac{E_p}{m_\mu}\right) + \frac{s \cdot p}{E_p}\left(4\frac{E_p}{m_\mu} - 1\right)\right]$$

如同我们在方程(10.142)中看到的，在 π^- 衰变中，μ^- 介子以正螺旋性产生．因此，根据方程(7.94)

$$\left\langle \frac{s \cdot p}{E_p} \right\rangle = -\hat{s} \cdot \hat{p} = -\cos\vartheta$$

其中 ϑ 是 μ^- 自旋和衰变电子的方向之间的夹角．这就给出

$$\langle d\omega^0 \rangle = \frac{\tilde{G}^2}{24\pi^3} m_\mu^2 E_p^2 dE_p d(\cos\vartheta) \times \left[3 - 4\frac{E_p}{m_\mu}\right](1 - \alpha\cos\vartheta)$$

其中
$$\alpha = \frac{4E_p - m_\mu}{3m_\mu - 4E_p}$$

是已经观察到的反对称参数[1]．

10.15 两种中微子

我们研究过的一切轻子相互作用都导致了(10.128)所给出的、对于轻子矩阵元的相同的 V-A 结构．也就是，在弱相互作用中 μ^- 和 e^- 转变为二分量的左手中微子．但是，大自然如此节省地提供宇称不守恒，以做为排除对于一个额外的中微子自由度的需要的方法之后，又以莫明其妙的慷慨赐予我们两种这样的客体，ν 和 ν'，它们近乎相同但却又很不一样．ν 在顶点处与一根电子线相联系，它是左手的并具有零(或非常小的)质量，ν' 与 μ 线相联系，情况完全一样．但

1) Konopinski, Okun, Berman, Fronsdal, 前已引用．

ν' 和 ν 是不同的[1]。

ν' 和 ν 也许并不相同的第一个启示来自辐射衰变

$$\mu^- \to e^- + \gamma$$

的衰变率的不可靠的理论估计与实验的比较，后者给出一个分枝比[2]

$$\frac{R(\mu^- \to e^- + \gamma)}{R(\mu^- \to e^- + \bar{\nu} + \nu')} < 10^{-7}$$

根据任何已知的机制，这个过程在弱相互作用中直到第一阶都不会发生，除非我们乞灵于有一个荷电的矢量中间介子传递弱相互作用的假设。利用这个假设，便可以用沿着图 10.20 所示的线的模型来做计算。尽管这些计算的答案是发散的并且不能过份认真地看待，要把上述的分枝比推到 10^{-4} 至 10^{-5} 以下却是难的。但是，如果与 μ^- 相联系的 ν' 不同于与 e^- 相联系的 ν，这些图连同所有其他的图都显然为零[3]。

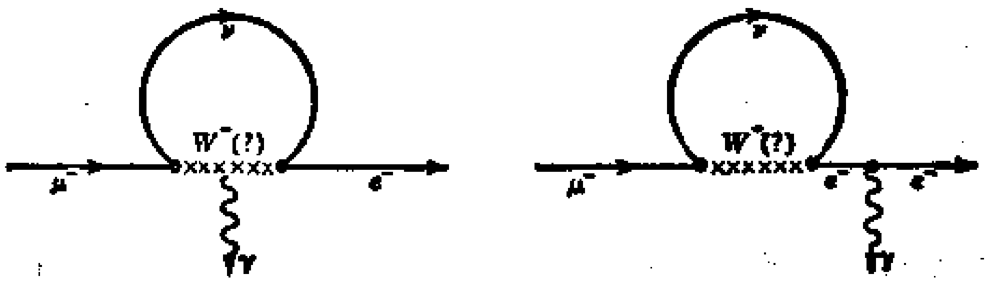


图 10.20 可能的 $\mu \to e + \gamma$ 衰变(对于全同的 ν 和 ν')

由 Pontecorvo 和 Schwartz[4] 建议的对于两种中微子的一个更为可靠的试验，包括用一个来自 π 衰变的高能 ν' 来引发逆 β 衰变反应。特别是，人们寻求在反应

---

1) 充其量，它们也许是一个四分量中微子旋量波函数的不同的二分量偶。
2) Konopinski, Okun, Berman, Fronsdel 以及 Danby 等，前已引用。
3) G. Feinberg, *Phys. Rev.*, **110**, 1482(1958).
4) Pontecorvo, Schwartz 和 Lee *and* Yang，前已引用。

$$\nu' + \mathfrak{N} \to \mathfrak{N} + \mu \text{ 或者 } e$$

中产生的高能电子或μ介子．因为 μ- 产生已经肯定地被观察到而却没有 e-事例被证实，人们现在有了支持两种中微子的正面的证据．对于困难的问题“在μ与e之间除了静止质量之外还有什么区别，而且大自然为什么要提供两种荷电的轻子？”现在加上了“为什么大自然要用两种中微子来找麻烦？”．

10.16 守恒矢量流假设

π介子和μ介子衰变以及原子核β衰变都指明，轻子对(e, ν)和(μ, ν')在衰变矩阵元中以一个共同的$(V-A)$形式而耦合．此外，比较 (10.112) 与 (10.129)，(其中 $\alpha = 1.21$，$\lambda = 1.00$，并且如所讨论的以高度的准确性 $\tilde{G} \approx G$)，表明在核子耦合与轻子耦合之间有强烈的类似性．

自然地会预期，围绕着物理核子但并不围绕轻子的那些强相互作用着的π介子云，将要修改在不出现这类强耦合时为“裸”核子而引进的耦合的矢量和轴矢量部分的强度．于是，这就看来颇为奇怪，在β衰变和μ衰变中相互作用的矢量部分的强度，竟在 2% 的范围内相等．甚至于常数 $\alpha = 1.21$ (它给出核子相互作用的轴向部分相对于轻子相互作用的轴向部分之比)也是足够地接近于 1 以鼓舞作有趣的猜测．

以前我们在第八章中关于电子的电磁相互作用和在 10.9 节中关于质子的电磁相互作用的讨论，为理解核子与轻子的相互作用流的矢量部分的相等，提供了一个重要线索．我们在 (8.50) 和 (8.57) 中看到，一个电子的顶点函数要用由于电磁辐射修正而引起的一个因子 Z_1^{-1} 所修改．按照 (8.46) 和 (8.57)，在 S 矩阵元中还出现一个附加的因子 Z_2，来自电子波函数由于自能插入而引起的重整化．从 (8.54) 我们看到，

在到 α 的最低阶，$Z_1 = Z_2$，因此这些效应抵消了；如在那里已经注意到的，恒等式 $Z_1 = Z_2$ 到所有各阶都有效，而且是 Ward 恒等式(8.51)的一个推论[1]。

对于一个质子的电磁相互作用也有类似的情况。介子的辐射修正，如图 10.13 和方程 (10.86) 所阐明的，以一个类似于 Z_1 的因子(在微扰论中是无穷大)修改质子的电磁顶点，这个因子 Z_1 又被质子波函数的介子重整化所抵消。通过证明 (8.51) 在出现介子-核子耦合时仍然有效，到介子-核子耦合的第二阶可以验证这个断言。

从重整化常数的这一恒等式，我们得出一个非常重要的结论：如果电子和质子的裸电荷大小相等，则它们的物理的、被观察到的电荷也大小相等，因为，对光子传播子算得的真空极化 (8.22) 以相同的方式影响电子和质子两者。这一点在质子的电磁结构的讨论中已经隐含在内了，在那里，(10.89) 中的 $F_1^{(p)}(0)$ 被置为等于 1。

在 β 衰变中，用于相互作用的矢量部分的 S 矩阵元的形式是

$$\frac{G}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_p\gamma_\mu\psi_n = \frac{G}{\sqrt{2}}\bar{\Psi}\gamma_\mu\tau_+\Psi \qquad (10.143)$$

其中 $$\tau_+ = 1/2(\tau_1 + i\tau_2)$$

它与一个质子的电磁顶点强烈类似。介子辐射修正在零动量转移下不改变 γ_μ 的系数的事实使这个类似性甚至越发引人注目。主要的差别是 β 衰变跃迁改变一个单位电荷。Gerschtein 和 Zel'dovich[2] 以及后来 Feynman 和 Gell-Mann[3] 提出，

1) 至于讨论见本书下卷。

2) S. S. Gerschtein *and* J. B. Zel'dovich ЖЭТФ **29**, 698. (1955); 译文载于 *Soviet Phys. JETP* **2**, 576(1957).

3) R.P. Feynman *and* M. Gell-Mann, *Phys. Rev.*, **109**, 193(1958).

只要用一个同位旋转动就能够从电磁流得到 β 衰变中的矢量"流". 由于强相互作用的电荷无关性，这是可能的. 从(10.89)回忆起核子的电磁流可以写为一个同位旋标量项和一个同位旋矢量项之和，Feynman 和 Gell-Mann 的规则是取同位旋矢量部分 j_3，对于 β 衰变把它换成

$$j_\mu^3 \to j_\mu^+ = \frac{G}{e\sqrt{2}}(j_\mu^1 + ij_\mu^2)$$

这个规则称为"守恒矢量流"假设. 如果没有辐射修正，它重新产生相互作用(10.143). 有了辐射修正，β 衰变矢量跃迁振幅直接从(10.89)得出，即

$$j_\mu^+ = 2\frac{G}{\sqrt{2}}\bar{\Psi}(p')\tau_+\left[\gamma_\mu F_1^{(v)}(q^2) + \frac{i\sigma_{\mu\nu}q^\nu}{2M}F_2^{(v)}(q^2)\right]\Psi(p) \tag{10.144}$$

因为在电子-质子散射中形状因子已经测得，而且对于 $-q^2 \ll \mu^2$ 基本上是常数，故可以用其在 $q^2=0$ 的值来代替它们. 于是方程(10.144)变为

$$j_\mu^+ = \frac{G}{\sqrt{2}}\bar{u}_p(p')\left[\gamma_\mu + \frac{3.70i\sigma_{\mu\nu}q^\nu}{2M}\right]u_n(p) \tag{10.145}$$

我们注意到这个流是守恒的，也就是，在结构上

$$(p'-p)^\mu j_\mu^+(q) = 0$$

除了确定在(10.145)中没有 γ_μ 的系数的重整化之外，我们在第二"弱磁"项[1]中发现了守恒矢量流假设的一个实验上的推论. 不幸的是，这个推论的量值与 β 衰变的一阶核子反冲修正同数量级，从而非常难以观察. 然而，分析在 B^{12} 和 N^{12} 衰变到 C^{12} 的衰变中的 β 谱的一个细致而漂亮的实验，已经确立了弱磁项的存在[2].

1) M. Gell-Mann, *Phys. Rev.*, **111**, 362(1958).

2) Y. K. Lee, L. W. Mo, *and* C. S. Wu, *Phys. Rev. Letters*, **10**, 253(1963).

对于遵守守恒流假设的 Feynman 图的那些规则，可以从电磁理论的规则类推出来．首先，在 β 衰变与电磁相互作用的 Feynman 图之间有个一一对应．例如，图 10.21 的 Feynman 图代替了对于电磁结构的图 10.13 的那些 Feynman 图．在图 10.21a 和 10.21c 中，按照我们的规则把用于电磁理论的因子 $e(1+\tau_3)/2$ 换成 $(G/\sqrt{2})\tau_+$．图 10.21b 是一个附加的直接"π 弱流"项，它也是通过在同位旋空间中转动 π 电磁流而被确定的．π 电磁顶点是通过把 (10.37) 中的流看做一个跃迁矩阵元而求得的；于是，在动量空间中顶点是

$$j_\mu^3 = -ie(\hat{\boldsymbol{\phi}}' \times \hat{\boldsymbol{\phi}})_3(p'_\mu + p_\mu) \qquad (10.146)$$

这里 $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\phi}}'$，p 和 p' 是初态和末态介子的同位旋波函数的动量．在 (10.146) 和 (10.37) 之间表观因子 2 的差异，是由于有两种方法把 (10.37) 中的波函数 $\boldsymbol{\phi}(x)$ 与初态和末态粒子相联系而产生的．为了得到 β 衰变的顶点，我们再次把 3-分量换成 (+) 分量，e 换成 $G/\sqrt{2}$；于是，图 10.21b 中的 π 顶点有形式

$$j_\mu^+ = -\frac{iG}{\sqrt{2}}[(\hat{\boldsymbol{\phi}}' \times \hat{\boldsymbol{\phi}})_1 + i(\hat{\boldsymbol{\phi}}' \times \hat{\boldsymbol{\phi}})_2](p'_\mu + p_\mu) \qquad (10.147)$$

这一相互作用项的存在导致另一个实验上的推论，即，下面的反应存在[1)]

$$\pi^- \rightarrow \pi^0 + e^- + \bar{\nu} \qquad (10.148)$$

强相互作用存在时的矩阵元还是通过一个同位旋转动而与 π 的电磁流 (10.85) 相联系．因此，介子辐射修正对 (10.147) 的修改只是在于把 π 形状因子 $F_\pi(q^2)$ 包括了进来，这个形状因子，当反应 (10.148) 中出现的 q^2 数值小时，可以令其等于 1．

1) Konopinski, Okun, Berman, 和 Fronsdal, 前已引用; Feynman *and* Gell-Mann, 前已引用．

于是，这一反应的反应几率可以从顶点（10.147）算出，它导致唯一的、但却难以测量的[1]预言

$$\frac{R(\pi^- \to \pi^0 + e^- + \bar{\nu})}{R(\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu})} = 1.0 \times 10^{-8} \quad (10.149)$$

于是，守恒矢量流假设可以概括如下．轻子流 $\bar{\phi}_e\gamma_\mu(1-\gamma_5)\phi_\nu$ 应与守恒同位旋流（10.43）的(+)分量相互作用，这个同位旋流（10.43），正如它对于电磁理论那样，是作为跃迁流看待的．实验上的推论的产生，是由于这个(+)分量是根据强相互作用的电荷无关性从第三分量确定的；借助于电磁相互作用，第三分量是可以测量的．

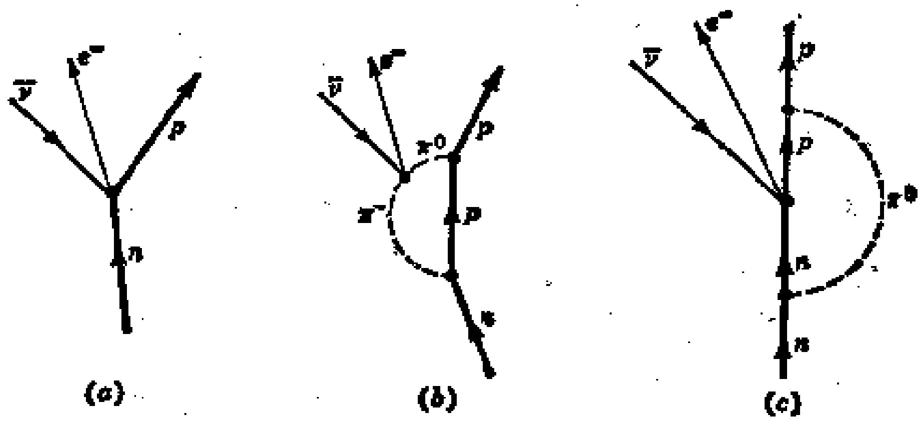


图 10.21 按照守恒矢量流假设，弱相互作用顶点的矢量部分

10.17 “部分守恒”轴矢量耦合

核子周围的介子云也将影响 β-衰变相互作用的轴矢量部分，或 Gamow-Teller 部分．我们可以把联系轴矢量强度与矢量耦合常数的数值 $\alpha = 1.21$ 解释为来自这种介子云的效应．α 接近于 1，而虚云效应引起的耦合强度重整化的微扰计算

1) 见 *Proceedings of 1962 High Energy Physics Conference at CERN (Geneva)* 中的报告．

给出一个对数发散的数. 这就暗示，也许一个近似守恒定律在对轴矢量 β 衰变耦合起作用[1].

目前，在这个模糊的概念或任何其他概念的基础上解释 α 的大小，都没有取得什么进展，我们将不进一步考虑 α. 但

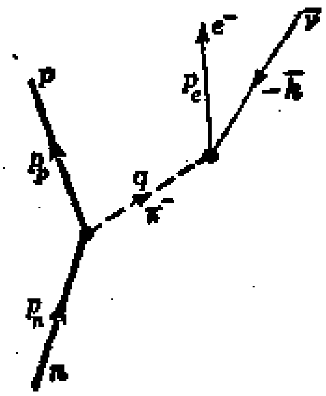


图 10.22 对于弱轴矢相互作用的单个 π-交换贡献.

是，在弱衰变振幅中，轻子耦合到核子的"部分"守恒轴矢量流的观念，在计算观察到的 $\pi^{\pm}$ 衰变寿命方面已经有一些成功，象我们现在讨论的一样.

对于轴矢量流的最简单的辐射修正是包含单个 π 介子的辐射修正，如图 10.22 所示. 按照我们的规则，它对于 β 衰变的不变振幅贡献一项

$$\mathfrak{M}_{1\pi} = \frac{Ga}{\sqrt{2}}(-ig\sqrt{2})[\bar{u}(p_p)i\gamma_5 u(p_n)]\frac{i}{q^2-\mu^2} \times (iq_\mu)[\bar{u}(p_e)\gamma^\mu(1-\gamma_5)v(\bar{k})] \tag{10.150}$$

式中 $Ga/\sqrt{2}$ 是 (10.139) 中的 $\pi^{\pm}$ 衰变的耦合常数，而 g 是 $\pi-N$ 强相互作用耦合常数. 附加的 $\sqrt{2}$ 来自发射荷电 π 介子的同位旋矩阵. 运动学图示于图 10.22. 有许多到弱耦

1) Y. Nambu, *Phys. Rev. Letters*, **4**, 380(1960); Bernstein, Fubini, Gell-Mann, *and* Thirring, *Nuovo cimento*, **17**, 757(1960).

合第一阶的附加贡献，它们来自图 10.23 所示的那些图。所有来自图 10.23 的图的贡献都可以写成如下形式

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{J}_{\mu}^{+}(p_p, p_n)\bar{u}(p_e)\gamma^{\mu}(1-\gamma_5)v(\bar{k})$$

其中

$$\mathfrak{J}_{\mu}^{+}(p_p, p_n)=\frac{G}{\sqrt{2}}\bar{u}(p_p)[\gamma_{\mu}\gamma_5\mathfrak{F}_1(q^2)+q_{\mu}\gamma_5\mathfrak{F}_2(q^2)$$

$$+P_{\mu}\gamma_5\mathfrak{F}_3(q^2)]u(p_n) \qquad (10.151)$$

而 $\qquad q=p_n-p_p=p_e+\bar{k}P=p_p+p_n$

这个形式的结构类似于对于电磁流 (10.87) 的结构，唯一的区别是这里插入 γ_5 以构成一个轴矢量．如果我们假定，对 $\mathfrak{J}_{\mu}^{+}$ 的一切贡献(在图 10.23 中就是这种情况) 都象一个同位旋矢量的(+)分量一样变换，我们便可以根据强相互作用的电荷共轭不变性和同位旋不变性来证明

$$\mathfrak{F}_3(q^2)=0 \qquad (10.152)$$

以使 (10.151) 的形式进一步简化．为了证明这一点，我们首先在同位旋空间中转动 $\mathfrak{J}_{\mu}^{+}$，做法是，把图 10.23a 中的弱顶点上的 τ_+ 改为 τ_3，以及在图 10.23b 中，把发射 π^- 介子(它与轻子相耦合) 的顶点处的 τ_+ 改为 τ_3．由于强相互作用的电荷无关性，这就把 $\mathfrak{J}_{\mu}^{+}$ 变为一个同位旋矢量的第三分量；特别是对于质子

$$\mathfrak{J}_{\mu}^{3}(p', p)=\frac{G}{\sqrt{2}}\bar{u}(p')[\gamma_{\mu}\gamma_5\mathfrak{F}_1(q^2)+q_{\mu}\gamma_5\mathfrak{F}_2(q^2)$$

$$+P_{\mu}\gamma_5\mathfrak{F}_3(q^2)]u(p) \qquad (10.153)$$

其中 $\qquad q_{\mu}=p_{\mu}-p'_{\mu} \qquad P_{\mu}=p'_{\mu}+p_{\mu}$

根据强耦合的电荷共轭不变性，来自图 10.23 的．对于 (10.151) 的附加贡献必然导致 $\mathfrak{J}_{\mu}^{3}(p', p)$，这个 $\mathfrak{J}_{\mu}^{3}(p', p)$，如果把质子换成了反质子，便完全地象“裸”质子流

$$\bar{u}(p')\gamma_{\mu}\gamma_5 u(p) \qquad (10.154)$$

一样地变换. 对于一个从动量 p 散射到 p' 的反质子的电荷共轭跃迁，我们有图 10.24，相应于一个沿时间逆向传播的负能质子，被从动量 $-p'$ 散射到 $-p$，如在第六章中已讨论过的；它的轴矢量流是

$$\bar{v}(p)\gamma_\mu\gamma_5 v(p') = -u^T(p)C^{-1}\gamma_\mu\gamma_5 C\bar{u}^T(p')e^{i\phi}$$
$$= -\bar{u}(p')\gamma_\mu\gamma_5 u(p)e^{i\phi} \qquad (10.155)$$

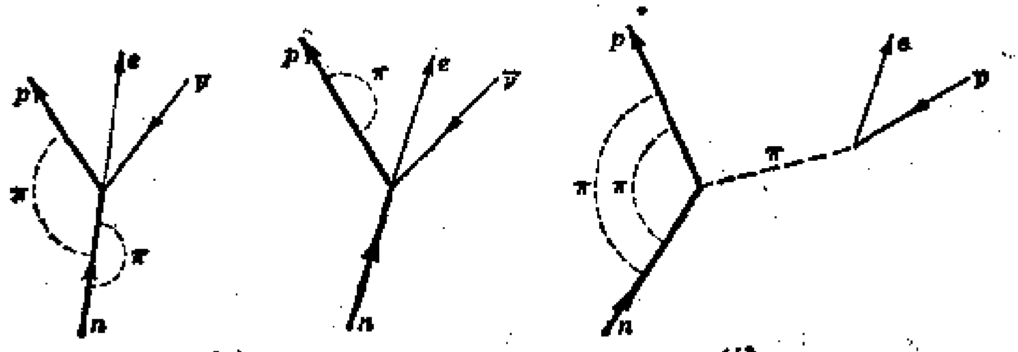


图 10.23 对 β 衰变的弱轴矢贡献

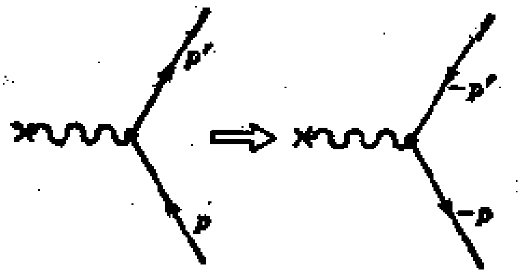


图 10.24 反质子的弱相互作用顶点

其中我们已经利用了 (5.8). 相因子是由外动量和外自旋确定的，正如我们在 (5.8) 之前就已看到的. 我们必须在 (10.153) 中只保留具有同样变换性质，也就是

$$\mathfrak{J}_\mu^3(-p,-p') = -\mathfrak{J}_\mu^3(p',p)e^{i\phi} \qquad (10.156)$$

的那些项. 从上式容易证明，(10.152) 随之而出.

那些与图 10.23b 相象的图，对于 β 衰变振幅的轴矢量部分的贡献，全都可以写成与 (10.150) 同样的形式再乘以一个

q^2 的标量函数. 对于 π-核子顶点的一切修改都将导致一个如下形式的相互作用

$$\bar{u}(p_p)\gamma_5\mathfrak{F}(q^2)u(p_n)$$

其中 $q = p_n - p_p$, 而 $\mathfrak{F}(q^2)$ 是不变动量转移 q^2 的一个不变函数. 这是根据下列事实: 总是有奇数个 γ_5 顶点,而且所有的因子 $\not{p}_P$ 和 $\not{p}_n$ 都可以换到右边或左边,直到它们与 Dirac 自由粒子旋量相邻并变成M. 这样, 图 10.23b (在这些图的核子云中单独一个介子直接与轻子相耦合)只是对于 (10.151) 中的 $\mathfrak{F}_2(q^2)$ 有贡献. 把这些贡献从 $\mathfrak{F}_2(q^2)$ 中分离出来,我们写下

$$\mathfrak{F}_2(q^2) = \bar{\mathfrak{F}}_2(q^2) - \frac{ag\sqrt{2}\ \mathfrak{F}(q^2)}{q^2 - \mu^2} \qquad (10.157)$$

这一项中的常数 a 按照 (10.140) 是与 $\pi^\pm$ 衰变观察到的寿命相联系,并且,如在 10.8 节中对于 π-核子散射所讨论的那样,形状因子 $\mathfrak{F}(q^2)$ 在点 $q^2 = \mu^2$ 处可以利用观察到的 π-核子耦合常数 g 的强度而具体说明. 把 (10.157) 中的 g 取做物理上观察到的 π-N 耦合常数 $g^2/4\pi \cong 14$, $\mathfrak{F}(q^2)$ 归一化为在 $q^2 = \mu^2$ 处为 1:

$$\mathfrak{F}(\mu^2) = 1 \qquad (10.158)$$

关于 $\bar{\mathfrak{F}}_2$ 尚一无所知. 但是,因为 $\mathfrak{F}_2$ 是一个 $\sim(q/M)$ 的反冲修正 $q_\mu\gamma_5$ 的系数, 它在 β 衰变中还没有被观察到. 根据我们以前的讨论,我们知道

$$\mathfrak{F}_1(0) = -\alpha = -1.21 \qquad (10.159)$$

有了这些准备, 我们可以着手解决部分守恒轴矢量流的问题. 假如轴矢量流是准确地守恒的,则把条件

$$q^\mu\mathscr{T}_\mu^\pm(p_p, p_n) = 0$$

应用于 (10.151) 导致关系

$$2M\mathfrak{F}_1(q^2) - q^2\mathfrak{F}_2(q^2) = 0$$

或

$$\mathfrak{F}_2(q^2) = + \frac{2M\mathfrak{F}_1(q^2)}{q^2}$$

因为 $\mathfrak{F}_1(0) \neq 0$，这意味着 $\mathfrak{F}_2$ 在 $q^2=0$ 处应该有一个极点，相应于交换一个无质量赝标量粒子．令人发生兴趣的是，把这个极点与(10.157)中的 π-介子极点联系起来，并且进一步把准确的流守恒的破坏与 π 介子存在一个质量联系起来．这样，利用(10.151)和(10.157)，便把我们引导到修改了的假设

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{\mu\to 0} q^\mu \mathfrak{J}_\mu^+(p_p, p_n) \\ &= \lim_{\mu\to 0} \bar{u}(p_p)\gamma_5\Big[-2M\mathfrak{F}_1(q^2) + q^2\mathfrak{F}_2(q^2) \\ &\quad - \frac{ag\sqrt{2}\,q^2\mathfrak{F}(q^2)}{q^2-\mu^2}\Big]u(p_n) \qquad (10.160)\end{aligned}$$

加上附加的假定：在极限 $\mu^2\to 0$ 下，不变形状因子相对于它们的物理值改变不大，我们从(10.160)求得

$$-2M\mathfrak{F}_1(0) = +2Ma = +2M(1.21) \approx ag\sqrt{2} \qquad (10.161)$$

在数值上，(10.161)预言

$$|a| \approx 0.87\mu$$

这个数值与从观察到的 $\pi^\pm$ 寿命［方程(10.141)］所得到的数值，在好于百分之十的范围内一致．在 π 介子的衰变率、Fevmi 常数 G、和 π-核子对于强相互作用的耦合常数之间的这样一个关系，是首先由 Goldberger 和 Treiman[1] 从一个近似色散理论计算中导出的．随后，它又由 Nambu 和 Bernstein 等人[2]作为"部分守恒"轴矢量流的一个推论做了讨论．

1) M. L. Goldberger *and* S. B. Treiman, *Phys. Rev.*, **110**, 1178(1958).
2) Nambu *and* Bernstein *et al.*，前已引用．

习　　题

1. 讨论方程 (10.3) 和 (10.4) 在电荷共轭变换和时间反演变换下的不变性。

2. 在电荷共轭变换下 φ_+和 φ_-以什么规律变换才使方程(10.12)和 (10.13) 不变?

3. 通过考虑六阶图,验证方程(10.21)的符号约定的一致性。

4. 在电荷无关近似中，G宇称是一个有用的对称算符。它由下式定义

$$G = e^{i\pi I_2} C$$

φ 和 Ψ 在 G 下的变换性质是什么?

5. 验明由方程 (10.51) 给出的势，在非相对论性极限下，到 g_0^2 阶，导致散射振幅(10.45)。

6. 证明势 (10.58)，在到 g_0^2 阶，导致 (10.57) 中的 S 波 π-N 散射振幅，并验明散射长度的表达式。

7. 利用迹的轮换性质证明方程 (10.82) 象一个 Lorentz 4-矢量一样变换，推广到任意阶。方程(10.82)中的积分 $\int d^4 k$ 必须要调整，发散部分必须分离为一个重整化常数;但是,这不会影响变换性质。

8. 证明,对于散射问题，当 $q^2<0$ 时,如果相互作用流是厄米的，则方程 (10.85) 和 (10.89) 中的电磁形状因子必定是实的。流必须是厄米的吗?

9. 讨论 π^0 和 K^0 介子的可能的电磁形状因子。

10. 假定电子和质子之间是单光子交换，证明：对于固定的动量转移和任意的相对论协变的质子或电子结构，"Rosenbluth 公式"[方程 (10.90)]给出了对于散射角的最普遍的依赖关系。

11. 证明：$F_\pi(q^2)$ 的二阶表达式，方程 (10.82)，可以表为一个谱的形式

$$F_\pi(q^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{dq'^2 \rho(q'^2)}{q'^2 - q^2 - i\varepsilon}$$

并计算 $\rho(q'^2)$。

12．证明：对于一个质子和一个 π^+ 介子，到 e^2 和 g^2 的第二阶，有 $Z_1 = Z_2$，并由此证明，如果它们的裸电荷相等，它们的重整化电荷仍保持相等。

13．到 e 和 g 的最低阶计算 π 介子的光致产生。验证规范不变性。

14．利用 (10.89) 并对形状因子取近似为它们的静态值，也就是，$F(q^2)\to F(0)$，计算中子和质子的二阶电磁自能。积分必须用调整法切断。用这个方法能够得出一个正的中子-质子质量差吗？[见 R. P. Feynman *and* G. Speisman, *Phys. Rev.*, **94**, 500. (1954) 和 Kerson Huang, *Phys. Rev.*, **101**, 1173 (1956).]

15．构成对于衰变 $\pi^0\to 2\gamma$ 的 S 矩阵的一个规范不变且相对论协变的形式，并计算衰变率。计算产生一个 Dalitz 偶：$\pi^0\to\gamma+e^++e^-$ 的分枝比。最后，讨论衰变为两个 Dalitz 偶的衰变，并证明，这两个偶的衰变平面的关联确定了 π^0 的宇称。[见 N. M. Kroll *and* W. Wada, *Phys. Rev.*, **98**, 1355(1955).]

16．验明：如果 β 衰变矩阵元由方程 (10.107) 给出，则电子的极化就如方程 (10.105) 所申明的是 $-|\beta_e|$。

17．到 G^2 的最低阶，验证 $\bar{\nu}+p\to n+e^+$ 的截面对能量的依赖关系 (10.113) 式。利用一个中间 W 传播子来计算这个截面，并在顶点处包括普遍的形状因子。

18．验明 Weyl 方程 (10.114) 有一个时间反演对称运算。

19．计算包括所有五种耦合 S，T，P，V 和 A 的一般的 μ-衰变谱，并与 (10.136) 式做比较。特别是证明，在这里一般的能量依赖关系没有改变，并利用五种耦合的强度对 Michel 参数(见 298 页脚注 1))求值。

20．如果 μ 衰变如同图 (10.15) 的 β 衰变一样，以有限质量的 W 介子为媒介，谱 (10.136) 就会被修改。算出这个修改并把它与 Michel 参数的改变联系起来。[见 T. D. Lee *and* C. N. Yang, *Phys. Rev.*, **108**, 1611(1957).]

21．计算 π 的 β-衰变率，方程 (10.148)，并验证分枝比 (10.149)。

22．计算下列衰变

$$K^0 \to \pi^- + e^+ + \nu$$
$$\to \pi^- + \mu^+ + \nu'$$

的分枝比和结构依赖关系

23．计算在衰变

$$\Sigma^0 \to \Lambda^0 + \gamma$$
$$\to \Lambda^0 + e^+ + e^-$$

中的 Dalitz 偶的分枝比。讨论在这个衰变中测定 Σ^0 与 Λ^0 的相对宇称的可能性。[见 G. Feinberg, *Phys. Rev.*, **109**, 1019 (1958); G. Feldman *and* T. Fulton, *Nucl. Phys.*, **8**, 106(1958).]

24．弱衰变

$$\Lambda^0 \to p + \pi^-$$

振幅的一般结构是怎样的？对于一个极化的 Λ^0，计算在衰变中的反对称参数。

25．计算极化中子的 β 衰变中的反对称参数和电子极化。

附录A 记　　号

坐标和动量

空-时坐标 $(t, x, y, z) = (t, \boldsymbol{x})$ 用逆变 4-矢量（c 和 $\hbar$ 取为 1）表示：

$$x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (t, x, y, z)$$

协变 4-矢量 x_μ 由改变空间分量的符号得出

$$x_\mu \equiv (x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv (t, -x, -y, -z) = g_{\mu\nu}x^\nu$$

其中

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

除非另作说明，约定对重复指标求和．如果两个（待求和的）全同指标都在上角或都在下角，多半有一个是弄错了的．内积是 $x^2 = x_\mu x^\mu = t^2 - \boldsymbol{x}^2$．

动量矢量类似地定义为

$$p^\mu = (E, p_x, p_y, p_z)$$

而内积是

$$p_1 \cdot p_2 = p_1^\mu p_{2\mu} = E_1 E_2 - \boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2$$

同样地

$$x \cdot p = tE - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{p}$$

4-矢量 p 总是写成细体字，而 3-矢量 $\boldsymbol{p}$ 写成黑体字。

在坐标表象中的动量算符写为

$$p^\mu = i\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(i\frac{\partial}{\partial t},\ \frac{1}{i}\nabla\right) = i\nabla^\mu$$

并且像一个逆变 4-矢量一样变换:

$$p^\mu p_\mu = -\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x^\mu} = -\Box$$

在这些单位中 Compton 波长是 $1/m$（对于电子 $\cong 3.86\times 10^{-11}$cm）而静能是 m（对于电子 $\cong 0.511$MeV）。

电磁场的 4-矢势定义为

$$A^\mu = (\Phi, \boldsymbol{A}) = g^{\mu\nu}A_\nu$$

场强定义为

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}A^\mu - \frac{\partial}{\partial x_\mu}A^\nu$$

用非协变记号表示的电场和磁场由下式给出:

$$\boldsymbol{E} = (F^{01}, F^{02}, F^{03})$$
$$\boldsymbol{B} = (F^{23}, F^{31}, F^{12})$$

Dirac 矩阵和 Dirac 旋量

一个具有物理动量 p 和极化 s 的粒子的 Dirac 旋量用 $u_\alpha(p, s)$ 表示，而对于反粒子用 $v_\alpha(p, s)$ 表示。在每一种情况下能量 $p_0 = E_p = +\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$ 都是正的。在每一种情况下，在静止系中具有形式

$$s^\mu = (0, \hat{\boldsymbol{s}}) \qquad \hat{\boldsymbol{s}}\cdot\hat{\boldsymbol{s}} = 1$$

的矢量 s^μ 代表在静止系中物理粒子的自旋方向。

Dirac 方程中的 γ 矩阵满足反对易关系

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

并且通过 $\boldsymbol{\gamma} = \beta\boldsymbol{\alpha}, \gamma_0 = \beta$ 而与 α 和 β 矩阵相联系。一个熟知的表象是

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\{\gamma^i\} = \boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{bmatrix}$$

这里

$$\sigma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

是熟知的 2 × 2Pauli 矩阵，而 $1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 是 2 × 2 单位矩阵. 经常出现的组合是

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \text{ 和 } \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma_5$$

在这个表示中 $\sigma^{\mu\nu}$ 的分量是

$$\sigma^{ij} = \begin{bmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{bmatrix}$$

其中 $i, j, k = 1, 2, 3$ 按轮换次序且

$$\sigma^{0i} = i\alpha^i = i\begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{bmatrix} \quad \gamma_5 = \gamma^5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

一个 γ 矩阵与一个普通的 4-矢量的内积是常常遇到的，并且标记为

$$\gamma_\mu A^\mu = \not{A} = \gamma^0 A^0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{A}$$

$$p_\mu \gamma^\mu = \not{p} = E\gamma^0 - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}$$

$$p_\mu \gamma^\mu = i\not{\nabla} = i\gamma_0 \frac{\partial}{\partial t} + i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} = i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

旋量 u 和 v 满足 Dirac 方程

$$(\not{p} - m)u(p, s) = 0$$

$$(\not{p} + m)v(p, s) = 0$$

并且由 (3.7) 的显式给出，但对于大多数的应用来说，下面的

投影算符已足够．伴随旋量

$$\bar{u} = u^{+}\gamma^{0}$$
$$\bar{v} = v^{+}\gamma^{0}$$

满足

$$\bar{u}(p, s)(\not{p} - m) = 0$$
$$\bar{v}(p, s)(\not{p} + m) = 0$$

用它们表出投影算符

$$u_{\alpha}(p, s)\bar{u}_{\beta}(p, s) = \left[\frac{\not{p} + m}{2m} \cdot \frac{1 + \gamma_5 \not{s}}{2}\right]_{\alpha\beta}$$

$$v_{\alpha}(p, s)\bar{v}_{\beta}(p, s) = -\left[\frac{m - \not{p}}{2m} \cdot \frac{1 + \gamma_5 \not{s}}{2}\right]_{\alpha\beta} \quad \text{(A.1)}$$

这导致归一化条件

$$\bar{u}(p, s)u(p, s) = 1$$
$$\bar{v}(p, s)v(p, s) = -1 \quad \text{(A.2)}$$

和完备性关系

$$\sum_{s} [u_{\alpha}(p, s)\bar{u}_{\beta}(p, s) - v_{\alpha}(p, s)\bar{v}_{\beta}(p, s)] = \delta_{\alpha\beta}$$

在求迹的过程中，我们构成矩阵元的厄米共轭，对于这些矩阵元

$$[\bar{u}(p', s')\Gamma u(p, s)]^{+} = \bar{u}(p, s)\bar{\Gamma} u(p', s')$$

其中 $\bar{\Gamma} = \gamma^{0}\Gamma^{+}\gamma^{0}$

例如

$$\bar{\gamma}^{\mu} = \gamma^{0}\gamma^{\mu +}\gamma^{0} = \gamma^{\mu}$$
$$\bar{\sigma}^{\mu\nu} = \gamma^{0}\sigma^{\mu\nu +}\gamma^{0} = \sigma^{\mu\nu}$$
$$\overline{i\gamma^{5}} = \gamma^{0}(i\gamma^{5})^{+}\gamma^{0} = i\gamma^{5}$$

对投影算符 (A.1) 的自旋求和，导致能量投影算符

$$[\Lambda_{+}(p)]_{\alpha\beta} = \sum_{\pm s} u_{\alpha}(p, s)\bar{u}_{\beta}(p, s) = \left(\frac{\not{p} + m}{2m}\right)_{\alpha\beta}$$

$$[\Lambda_-(p)]_{\alpha\beta} = -\sum_{\pm s} v_\alpha(p,s)\bar{v}_\beta(p,s) = \left(\frac{-\not{p}+m}{2m}\right)_{\alpha\beta} \tag{A.3}$$

流的 Gordon 分解是一个常见而有用的恒等式

$$\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p')\left[\frac{(p+p')^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu}(p'-p)_\nu}{2m}\right]u(p)$$

迹定理和 γ 恒等式

$$\not{a}\not{b} = a \cdot b - i\sigma_{\mu\nu}a^\mu b^\nu$$

奇数个 γ_μ 的迹为零

$$T_r\gamma_5 = 0$$

$$T_r 1 = 4$$

$$T_r\not{a}\not{b} = 4a \cdot b$$

$$T_r\not{a}_1\not{a}_2\not{a}_3\not{a}_4 = 4[a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 - a_1 \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_4 + a_1 \cdot a_4 \cdot a_2 \cdot a_3]$$

$$T_r\gamma_5\not{a} = 0$$

$$T_r\gamma_5\not{a}\not{b}\not{c}\not{d} = 4i\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$$

$$\gamma_\mu\not{a}\gamma^\mu = -2\not{a}$$

$$\gamma_\mu\not{a}\not{b}\gamma^\mu = 4a \cdot b$$

$$\gamma_\mu\not{a}\not{b}\not{c}\gamma^\mu = -2\not{c}\not{b}\not{a}$$

关于进一步的规则见 7.2 节。

附录 B　Feynman 图规则

截面的表达式分为两个部分：第一是不变振幅 $\mathfrak{M}$，它是一个 Lorentz 标量而且物理就在其中，第二是相空间因子和运动学因子．通过$\mathfrak{M}$来表示，微分截面 $d\sigma$ 的表达式就是（只是对于零自旋粒子和光子）

$$d\sigma=\frac{1}{|\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2|}\left(\frac{1}{2\omega_{p_1}}\right)\left(\frac{1}{2\omega_{p_2}}\right)|\mathfrak{M}|^2\frac{d^3k_1}{2\omega_1(2\pi)^3}\cdots\frac{d^3k_n}{2\omega_n(2\pi)^3}(2\pi)^4\delta^4\left(p_1+p_2-\sum_{i=1}^{n}k_i\right)S \quad (\text{B.1})$$

这里照例 $\omega_p=\sqrt{|\boldsymbol{p}|^2+m^2}$，而 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 是入射的共线粒子的速度．然后，取这个表达式对所有不测量的末态粒子动量 $k_1\cdots k_n$ 的积分．统计因子 S 是这样得到的：如果在末态中有 m 个全同粒子，在 S 中就包含一个因子 $1/m!$，即

$$S=\prod_i\frac{1}{m_i!}$$

对于 Dirac 粒子[1)]，因子 $1/2\omega_p$ 要换成 m/E_p，而统计因子 S 还要包括进去；所有其他因子仍然一样．

一个质量为 M 的粒子的微分衰变率，在其静止系中由下式给出

1）如果我们采取约定令 Dirac 旋量归一化为 $2m$ 而不是如在 (A.2) 式中归一化为 1，则 (B.1) 式也适用于费米子．这时，能量投影算符简单地就是 $(m\pm\not{p})$ 而不是 (A.5)．

$$d\omega = d\left(\frac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{2M}|\mathfrak{M}|^2 \frac{d^3k_1}{2\omega_1(2\pi)^3}$$

$$\cdots \frac{d^3k_n}{2\omega_n(2\pi)^3}(2\pi)^4\delta^4\left(p - \sum_{i=1}^{n} k_i\right)S$$

其中因子的定义如前．对于任何末态费米子，还是 $1/2\omega_i \to m/E_i$；如果初态粒子是一个费米子，就去掉因子 $1/2M$．

如果需要，就对末态的极化求和，对初态的极化求平均．

不变振幅$\mathfrak{M}$是通过画出问题所涉及过程的所有 Feynman 图来计算的，除了带有不连通圈的图以及在外线中带有自能插入的图，这些图是特别排除在外的． 与图 G 相应的振幅 $\mathfrak{M}(G)$ 是通过把图 G 中的诸元素与诸因子联系起来而建立的．这些与相互作用的细节无关的因子是：

1．对于每个进入图的 0-自旋玻色子，有一个因子 $\sqrt{Z}$，$\sqrt{Z}$ 是通过计算在极限 $p^2 \to \mu^2$ 之下的准确介子传播子 $\Delta'_F(p)$ 而求得的；当 $p^2 \to \mu^2$ 时，$\Delta'_F(p) \to Z\Delta_F(p)$．

2．对于每一根进入图的外部费米子线，按这根线究竟是在初态还是末态，有一个因子 $\sqrt{Z_2}u(p,s)$ 或 $\sqrt{Z_2}v(p,s)$；同样地，对于每一根离开图的费米子线，有一个因子 $\sqrt{Z_2} \times \bar{u}(p,s)$或 $\sqrt{Z_2}\bar{v}(p,s)$．Z_2 由下列的极限来定义

$$\lim_{\not p \to m} S'_F(p) = Z_2 S_F(p)$$

3．对于每一根外部光子线，有一个因子 $\varepsilon_\mu \sqrt{Z_3}$ 这里，当 $q^2 \to 0$ 时，

$$D'_F(q)_{\mu\nu} \to \frac{-Z_3 g_{\mu\nu}}{q^2} + \text{规范项}$$

在最低阶的微扰计算中，这些 Z 因子可以取等于 1． 在更高阶的微扰计算中，加上自能插入和顶点插入，这些 Z 因子

把电荷从其裸值重整化为物理值.

4. 对于每一根动量为 p 的内部费米子线，有一个因子

$$iS_F(p)=\frac{i}{\not p-m+i\varepsilon}=\frac{i(\not p+m)}{p^2-m^2+i\varepsilon}$$

5. 对于每一根动量为 p 的 0-自旋内部介子线，有一个因子

$$i\Delta_F(q)=\frac{i}{q^2-\mu^2+i\varepsilon}$$

6. 对于每一根动量为 q 的内部光子线，有一个因子

$$iD_F(q)_{\mu\nu}=-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2+i\varepsilon}$$

在一个具有守恒流的理论中，正比于 $q_\mu q_\nu$，$q_\mu\eta_\nu$ 等的规范项可以忽略.

对于介子-核子物理，在每一根内部介子线上出现一个同位旋因子 δ_{ij}，而对于外线则有因子：

7. 对于初态和末态核子旋量，是因子 χ 或 χ^+；对于质子 $\chi=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，对于中子 $\chi=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$. （对于 K 和 Ξ 介子也出现类似的因子）.

8. 对于初态或末态 π 介子同位旋波函数，此因子分别是 $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ 或 $\hat{\boldsymbol{\phi}}^*$，其中

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_{\pi\pm}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ \pm i,\ 0)\quad \hat{\boldsymbol{\phi}}_{\pi^0}=(0,\ 0,\ 1)$$

（对于 Σ 粒子也出现类似的因子）.

9. 对于每一个不受顶点处动量守恒约束的内部动量 l，有一个因子

$$\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}$$

10. 对于每一个闭合的费米子迴线，有一个因子 -1。

11. 在只是以互换两根全同费米子外线相区别的两个图之间，有一个因子 -1. 这不仅包括在末态交换全同粒子，而且包括互换初态粒子和末态反粒子，等等.

相互作用确定了顶点的结构和类型. 我们在这里介绍四种典型理论的规则：

旋量电动力学

有两类顶点，如图 B.1 所示，相应于编时相互作用哈密顿量密度

$$\mathscr{H}_I = -\mathscr{L}_I = :e_0\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu: - \delta_m:\bar{\psi}\psi:$$

适合于这些顶点的规则是

1. 在每一个顶点上有一个因子 $-ie_0\gamma_\mu$.

2. 对每一质量抵消项有一个因子 $i\delta_m$.

3. 利用 $e = Z_2Z_1^{-1}\sqrt{Z_3}e_0 = \sqrt{Z_3}e_0$ 把电荷重正化，这里对于 $p' = p = m$，准确的顶点 $\Gamma_\mu(p', p) \to Z_1^{-1}\gamma_\mu$，并且根据 Ward 恒等式，$Z_1 = Z_2$.

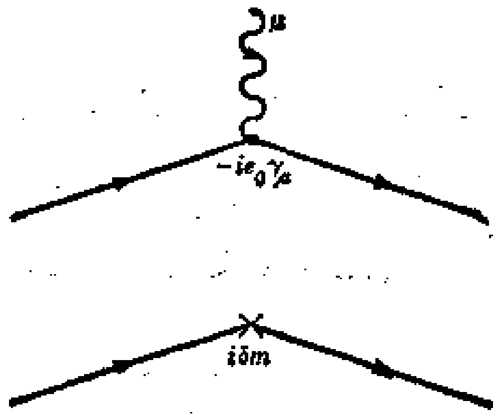


图 B.1

0-自旋波色子的电动力学

这里有三类顶点，如图 B.2 所示，相应于相互作用拉氏量密度

$$\mathscr{L}_I = -ie_0:\varphi^+\left(\frac{\vec{\partial}}{\partial x_\mu}-\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_\mu}\right)\varphi:A_\mu + e_0^2:A^2::\varphi^+\varphi:$$

$$+\delta\mu^2:\varphi^+\varphi:$$



图 B.2

适合于这些顶点的规则是

1. 有一个因子 $-ie_0(p+p')_\mu$，这里 p 和 p' 是在带电荷线上的动量。

2. 对于每一个“海鸥”图，有一个因子 $+2ie_0^2g_{\mu\nu}$。

3. 对于每一质量抵消项，有一个因子 $i\delta\mu^2$。

4. 对于每一个如图 B.3 所示的、仅含有两根光子线的闭合迴线，有一个因子 1/2。

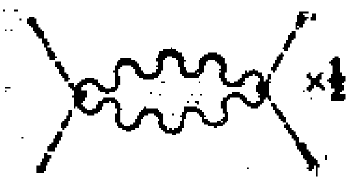


图 B.3

5. 如同在旋量电动力学中那样，把电荷重整化。

γ_5 介子-核子散射

在电荷无关理论中有四个相互作用项

$$\mathscr{H}_1 = -\mathscr{L}_1 = :ig_0\bar{\Psi}\gamma_5\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\phi}\Psi: - \delta_m:\bar{\Psi}\Psi:$$
$$- 1/2\delta\mu^2:\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\phi}: + 1/4\delta\lambda:(\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\phi})^2:$$

如在图 B.4 和 B.5 中所阐明的。圆点线表明，只有 $I=0$ 从介子偶 ij 传递到介子偶 rs，如下面的规则 2 所表明的。质量抵消项照以前一样处理，并且有：



图 B.4

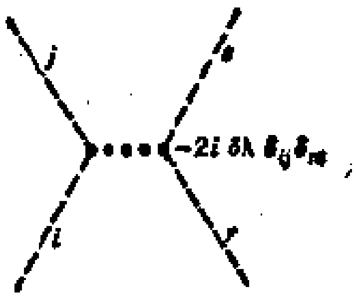


图 B.5

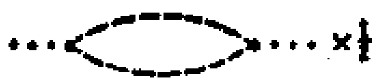


图 B.6

1. 在每一个介子-核子顶点上，有一个因子 $g_0\gamma_5\tau_\alpha$，分别给出荷电介子对质子和中子的相对耦合强度为 $\sqrt{2}\,g_0$，中性介子对质子和中子的相对耦合强度为 ± 1。

2. 在每一个图 B.5 中的四介子顶点上，有一个因子 $-2i\delta\lambda\delta_{ij}\delta_{rs}$。

3. 对于每一个如图 B.5 的，仅含有两根介子线的闭合迴线，有一个因子 1/2。

1-自旋玻色子的电动力学

矢量玻色子的传播子是 $[-g_{\mu\nu}+k_\mu k_\nu/m^2](k^2-m^2)^{-1}$，代替了无质量光子的 $-g_{\mu\nu}/k^2$，而外线和光子一样有一个极化因子 e_μ。

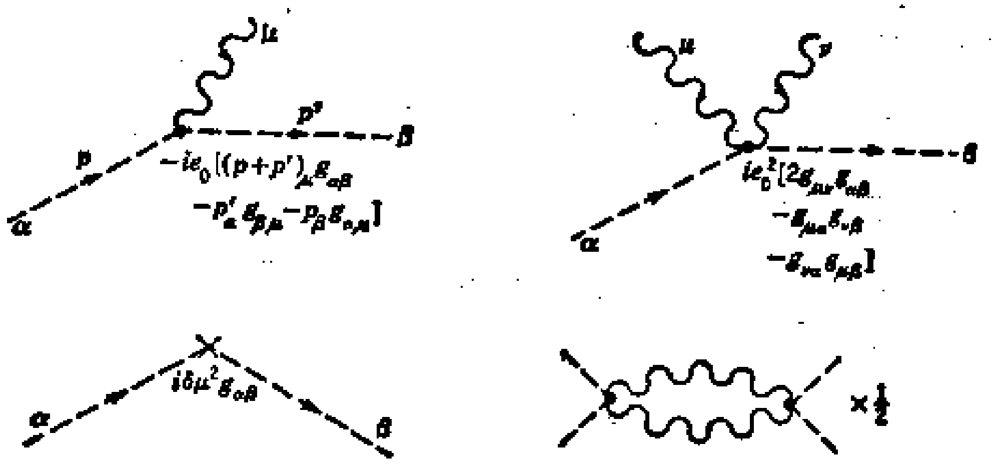


Fig. B.7

图 B.7

有图 B.7 所示的电动力学顶点，相应于相互作用拉格朗日密度

$$\mathscr{L}'=-ie_0:\left[\left(\frac{\partial\varphi_\nu^*}{\partial x_\mu}\right)(A^\nu\varphi_\mu-A_\mu\varphi^\nu)\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_\mu}\right)(A^\nu\varphi_\mu^*-A_\mu\varphi^{\nu*})\right]:$$
$$+e_0^2:[A_\mu A^\mu\varphi_\nu^*\varphi^\nu-A_\mu\varphi^\mu A^\nu\varphi_\nu^*]:+\delta\mu^2:\varphi_\nu^*\varphi^\nu:$$

图中所示的这些顶点的规则是：

1. 一个因子 $-ie_0(p'+p)_\mu g_{\alpha\beta}+ie_0 g_{\beta\mu}p'_\alpha+ie_0 p_\beta g_{\alpha\mu}$.

2. 一个因子 $+ie_0^2[2g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}-g_{\mu\alpha}g_{\beta\nu}-g_{\mu\beta}g_{\alpha\nu}]$.

3. 对于每一质量抵消项，有一个因子 $i\delta\mu^2 g_{\alpha\beta}$.

4. 对于每一仅含有两根光子线的闭合迴线，有一个因子 1/2.

5. 关于从正则理论导出这些规则，反常磁矩项的效应，以及规则化方案，见 T. D. Lee *and* C. N. Yang, *Phys. Rev.*, **128**, 885(1962).

在所有上述的例子中，矩阵都是以"自然顺序"安排的，对于闭合迴线这意味着求迹. 同位旋指标与它们在介子线另一端的相应指标并缩. 对于光子极化求和

$$\sum_\lambda \varepsilon_\mu(k,\lambda)\varepsilon_\nu(k,\lambda)\Longrightarrow -g_{\mu\nu}$$

而对于矢量介子

$$\sum_\lambda \varepsilon_\mu(k,\lambda)\varepsilon_\nu(k,\lambda)\Longrightarrow -g_{\mu\nu}+\frac{k_\mu k_\nu}{m^2}$$